

2022-2023 学年 2023 届高三下学期第三次模拟考试

数 学

时量：120 分钟 满分：150 分

一、单选题(本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分)

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + x > 6\}$, $B = \{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $[-4, -2) \cup (3, 4]$ B. $[-4, -3) \cup (2, 4]$ C. $\{-4, -3, 4\}$ D. $\{-4, 3, 4\}$

2. 已知复数 z 满足: $(2+i)z = m$, (其中 i 为虚数单位, m 为正实数), 则 z 的共轭复数 \bar{z} 在复平面内对应的点位于()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 直线 $l_1: ax + y + 1 = 0$ 与 $l_2: x + ay - 1 = 0$ 平行的充要条件是()

- A. $a = 1$ B. $a = -1$ C. $a = 1$ 或 -1 D. 0

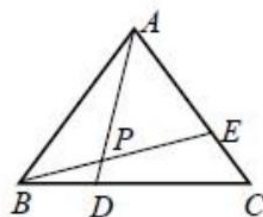
4. 现有一张长方形纸片, 将其沿直线(不过顶点)剪开, 得到 2 张纸片, 再从中任选一张沿直线(不过顶点)剪开, 得到 3 张纸片..., 以此类推, 每次从纸片中任选一张沿直线(不过顶点)剪开, 设剪纸 n 次后得到的所有多边形的边数总和为 a_n , 则 $a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_{10} = (\quad)$

- A. 310 B. 260 C. 220 D. 205

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}$, P 是线段 AD 与 BE 的

交点, 若 $\overline{AP} = m\overline{AB} + n\overline{AC}$, 则 $m+n$ 的值为()

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{6}{7}$ D. 1



6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 函数 $g(x) = f(x) + x^2$ 为奇函数, 且 $g(x+4) = g(x)$, 则 $f(6)$ 的值为()

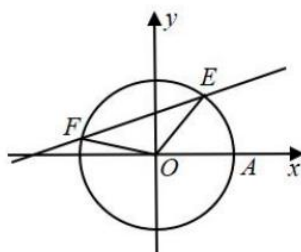
- A. 0 B. 3 C. -44 D. -36

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 以 OA 为始边, 角 α 与 β 的终边分

别与单位圆相交于 E, F 两点, 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 若直

线 EF 的斜率为 $\frac{1}{4}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = (\quad)$

- A. $-\frac{15}{17}$ B. $-\frac{8}{17}$ C. $\frac{8}{17}$ D. $\frac{15}{17}$



8. 已知函数 $f(x) = e^x + x - x^a - a \ln x$ 在区间 $(1, e^2)$ 上恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(e, \frac{e^2}{2})$ B. $(0, \frac{e^2}{2})$ C. $(1, \frac{e^2}{2})$ D. $(0, e)$

二、多选题(每小题 5 分, 共 20 分, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错得 0 分)

9. 下列不等式成立的是()

- A. $0.3^{0.7} < 0.3^{0.9}$ B. $\log_{1.3} 3 > \log_{1.3} 2$
C. $\log_{0.3} 0.2 > 0.3^{0.2}$ D. $\log_3 2 < 2^{-1.1}$

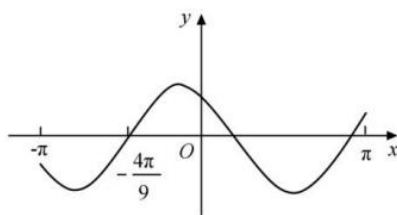
10. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图, 则()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{4\pi}{3}$

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{9}$ 对称

D. 将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位, 再将图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$ 倍, 纵坐标不变得到函数 $f(x)$ 的图象



11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 $O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 与圆 $M: (x-6)^2 + y^2 = 4$, P, Q 分别为圆 O 和圆 M 上的动点, 下列说法正确的是()

A. 过点 $(4,2)$ 作圆 M 的切线有且只有一条

B. 若圆 O 和圆 M 恰有 3 条公切线, 则 $r = 4$

C. 若 $|PQ|$ 的最小值为 1, 则 $r = 3$

D. 若 $r = 2$, 则直线 PQ 的斜率的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $b = 1$, 且 $a^2 - c^2 = 2$, 则下列结论正确的是()

A. $a < \frac{3}{2}$

B. $\tan A + 3 \tan C = 0$

C. 角 B 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

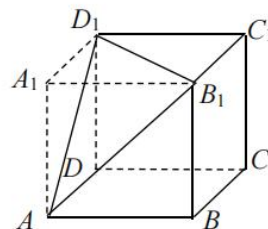
D. $\triangle ABC$ 的外接圆面积的最小值为 π

三、填空题(本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $f(x) = e^{x-1} + \frac{\ln x}{x}$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为_____.

14. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (2, 1)$, \mathbf{b} 为单位向量, 且 $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, 则向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 上的投影向量的坐标为_____.

15. 如图所示, 将棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去一个三棱锥得到多面体 $ABCD-B_1C_1D_1$, 在该多面体内放入一个球, 则球的半径的最大值为_____.



16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n + 1, & n \text{ 为奇数} \\ a_n + 2, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $a_8 =$ _____, 当 n 为偶数时

$a_n =$ _____.

17. (本小题满分 10 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_2 = 7$, $S_5 = 55$.

(1) 求 a_n 和 S_n ;

(2) 若 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}S_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

已知点 $P(2,2)$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 16x = 0$ 过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A 、 B 两点, 线段 AB 的中点为 M , O 为坐标原点.

(1) 求 M 的轨迹方程;

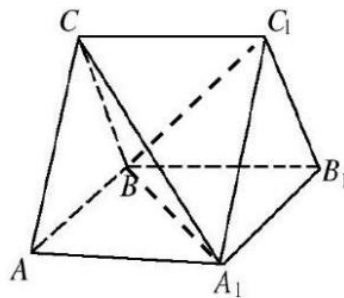
(2) 当 $|OP| = |OM|$, 求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1B_1B , $AC = BC$, 四边形 AA_1B_1B 是边长为 2 的菱形, $\angle BAA_1 = 60^\circ$.

(1) 证明: $AB \perp A_1C$;

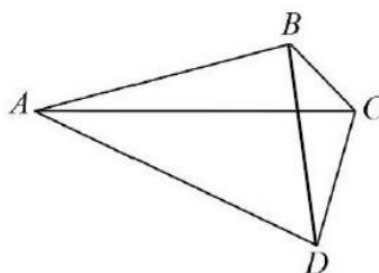
(2) 若 $A_1C \perp BC_1$, 求平面 BA_1C 和平面 BA_1C_1 夹角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, 已知 $BC = 1$, $AC^2 = AB^2 + AB + 1$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长;

(2) 若 $AB = 3$, $\angle ADB = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, 求 $\angle BDC$ 的值.



21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 + 3x$.

(1) 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $\frac{3}{1 \times 2} + \frac{4}{2 \times 3} + \frac{5}{3 \times 4} + \cdots + \frac{n+2}{n(n+1)} \geq \ln(n+1)$

22. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = a(x - \ln x) + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} (a > 0)$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $a = 1$ 时, 证明 $f(x) > f'(x) + \frac{3}{2}$ 对于任意的 $x \in [1, +\infty)$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

