中学生标准学术能力诊断性测试2021年10月测试

理科数学试卷

本试卷共150分，考试时间120分钟。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，$B=\{x|y=\lg(x-1)\}$，$A\cup B=$

A．$\{x|x>1\}$　　B．$\{x|x<1\}$　　C．$\{x|x\le 1\}$　　D．$\{x|x\ge 1\}$

2．双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$ 的离心率为

A．$\sqrt{3}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D．$\sqrt{6}$

3．复数 z 满足 $(1-i)z=3+2i$（i为虚数单位），则 $\bar{z}=$

A．$\frac{1+5i}{2}$　　B．$\frac{1-5i}{2}$　　C．$\frac{-1+5i}{2}$　　D．$\frac{-1-5i}{2}$

4．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，q 为常数，则“数列 $\{a_n\}$ 是等比数列”为“$S_{n+1}=qS_n+a_1$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知 $(x-1)^3(x+a)^2(a\in\mathbf{Z})$ 的展开式中 x 的系数等于8，则展开式中 x^3 的系数等于

A．4　　B．7　　C．-5　　D．-8

6．若△ABC 满足 $a^2=b^2+c^2-bc$，$\sin B=2\sin C$，则△ABC 为

A．锐角三角形　　B．直角三角形

C．钝角三角形　　D．锐角三角形或直角三角形

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\sin 4x|, x\le 0,\\ 2f\left(x-\frac{\pi}{4}\right), x>0,\end{cases}$ $g(x)=\log_2|x|$，则 $f(x)-g(x)=0$ 在 $x\in[-2,2]$ 上根的个数为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

8．设 $a\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，随机变量 X 的分布列如表所示，随机变量 Y 满足 $Y=3X+2$，则当 a 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 上增

大时，关于$D(Y)$的表述，下列正确的是

X	-2	-1	0
P	$2b$	$b-a$	a

A．$D(Y)$增大　　　　B．$D(Y)$减小

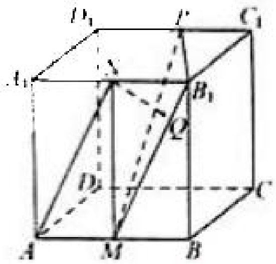
C．$D(Y)$先增大后减小　　　　D．$D(Y)$先减小后增大

9．已知$a>0$，$b>0$，满足$\frac{3}{a}+2b=4$，则$\frac{2a}{a+1}+\frac{3}{2b}$的最小值为

A．$2+2\sqrt{3}$　　　　B．$\frac{9+6\sqrt{2}}{7}$

C．3　　　　D．$9+6\sqrt{2}$

10．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别为AB，A_1B_1的中点，P是边C_1D_1上的一个点（包括端点），Q是平面PMB上一动点，满足$\angle MNA=\angle MNQ$，则点Q所在轨迹为



（第10题图）

A．椭圆　　　　B．双曲线

C．抛物线　　　　D．抛物线或双曲线

11．已知$f(x)=\ln x-a\sqrt{x}-b-1$，若存在实数a，使得$f(x)$在$\left(\frac{1}{e^2},e^2\right)$上有2个零点，则$\frac{b}{a}$的取值范围为

A．$\left(\frac{e}{2},e\right)$　　B．$\left(1,\frac{e}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{e}{3},\frac{e}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{e}{2},e^2\right)$

12．已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n^2+1}$，满足$a_1\in(0,1)$，$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=2020$，则下列成立的是

A．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}>\frac{1}{2020}$　　　　B．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}=\frac{1}{2020}$

C．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}<\frac{1}{2020}$　　　　D．以上均有可能

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知向量$\vec{a}=(-2,4)$，$\vec{b}=(t,-1)$，且$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影等于$-\sqrt{10}$，则t的值为______．

14. 圆 $x^2-2x+y^2-4y-4=0$ 与圆 $x^2-8x+y^2-6y+24=0$ 的公共弦长为_______.

15. 甲、乙、丙、丁 4 个小球放入编号分别为 A，B，C，D 的四个盒子中，恰好只有一个空盒，若乙只能放入 A 盒，甲不能放入 D 盒，则分配方法共有_______种.（用数字作答）

16. 抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，过点 F 作直线 AB 与抛物线交于点 A，B，$B(x_0,y_0)$ 在第四象限，连 AO（O 为 C 的顶点）并延长交 l 于点 M，过 B 作 BC 垂直于 x 轴，垂足为 C，若 $S_{\triangle ABM}-S_{\triangle BOC}=2\sqrt{2}$，则 $y_0=$_______.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）已知函数 $f(x)=\cos^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$，两相邻最高点与最低点之间距离为 $\sqrt{2+\frac{\pi^2}{4}}$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

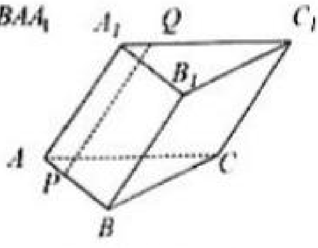
（2）在△ABC 中，$f\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$c=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 a 的值.

18. （12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，公比 $q>1$，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_2=9$，$S_3=39$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\frac{3}{4}\left[(2n+1)3^n-1\right]$.

（1）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{5}{4}$.

19. （12 分）如图所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 2，$\angle BAC=\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°$，$P$，$Q$ 分别在 AB，A_1C_1 上（不包括两端），$AP=A_1Q$.



（第 19 题图）

（1）求证：PQ // 平面 BCC_1B_1；

（2）设 PQ 与平面 ABC 所成角为 θ，求 $\sin\theta$ 的取值范围.

20. （12 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，且椭圆 C 上的点到焦点距离的最大

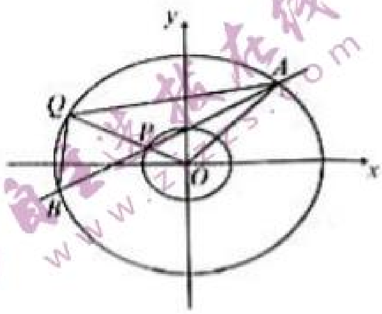
值为$\sqrt{3}+1$．

（1）求椭圆C的方程；

（2）设椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=9$，$P$为椭圆$C$上任意一点，过点$P$的直线$l$交椭圆$E$于$A$、$B$两点，射线$OP$交椭圆$E$于点$Q$．

（i）证明$\frac{S_{\triangle AQP}}{S_{\triangle AOP}}$为定值；

（ii）求$\triangle ABQ$面积的最大值．



（第 20 题图）

21．（12 分）已知函数$f(x)=x^2+2x-a\ln x$，其中$a\in\mathbf{R}$．

（1）对于任意$t\geq 1$，恒有$f(2t-1)\geq 2f(t)-3$，求a的取值范围；

（2）设$a>0$，存在实数t使关于x的方程$f(x)=t$有两个实根x_1，x_2（$x_1<x_2$），求证：函数$f(x)$在$x=\frac{x_1+x_2}{2}$处的切线斜率大于 0．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．（10 分）[选修 4－4：极坐标与参数方程]

已知曲线C的极坐标方程为$\rho^2=\frac{20}{5\sin^2\theta+4\cos^2\theta}$，以极点为原点，极轴为$x$轴的正半轴建立平面直角坐标系，直线$l$的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$（$t$为参数，$t\in\mathbf{R}$），$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$．

（1）求曲线C的直角坐标方程，并判断该曲线是什么曲线？

（2）设过点$P(1,0)$的直线l与曲线C交于A，B两点，求弦AB长度的取值范围．

23．（10 分）[选修 4－5：不等式选讲]

（1）解不等式：$|2|x-1|-3|\geq 1$；

（2）设正数a，b，c满足$2a+12b+9c=11abc$，求$ab+2bc+3ac$的最小值，并指出取到最小值时的条件．

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 10 月测试

理科数学 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	C	B	A	C	B	B	A	B	D	A	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．3 或 $-\frac{1}{3}$

14．$\frac{3\sqrt{10}}{5}$

15．26

16．$-\sqrt{2}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

解析：

（1）$f(x)=\cos^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1+\cos 2\omega x}{2}-\frac{\sin 2\omega x}{2}-\frac{1}{2}$……………………1 分

$=\frac{1}{2}(\cos 2\omega x-\sin 2\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\omega x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\omega x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\omega x\right)$……………………3 分

$\because T=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$

因为两相邻最高点与最低点距离为 $\sqrt{\sqrt{2}^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2}=\sqrt{2+\frac{\pi^2}{4\omega^2}}=\sqrt{2+\frac{\pi^2}{4}}$

$\therefore \omega=1$……………………………………………………………………5 分

$\therefore f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$……………………………………………………6 分

（2）$f\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[\frac{\pi}{4}-2\left(\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(-A)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \sin A=\frac{1}{2}$，$A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ ……………………………………7 分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times b\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{b}{2}$

$\because S_{\Delta ABC}=\frac{b}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore b=\sqrt{3}$ ……………………………………8 分

当 $A=\frac{\pi}{6}$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3+4-2\times 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，$\therefore a=1$ ……………………10 分

当 $A=\frac{5\pi}{6}$，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3+4-2\times 2\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=13$，$\therefore a=\sqrt{13}$

$\therefore a=1$ 或 $\sqrt{13}$ ……………………………………12 分

18.（12 分）

解析：

（1）数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2=9$，$S_3=39\Rightarrow a_1+a_3=30$，

$\therefore\begin{cases}a_1\cdot q=9,\\ a_1+a_1q^2=30.\end{cases}$ 将 $a_1=\frac{9}{q}$ 代入可得：$\frac{9}{q}+9q=30$，$\therefore q=\frac{1}{3}$ 或 3，

$\because q>1$，$\therefore q=3$ ……………………………………2 分

$\because a_1=\frac{9}{3}=3$，$\therefore a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$ ……………………………………3 分

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\frac{3}{4}\left[(2n+1)3^n-1\right]$ ①

当 $n\geq 2$ 时，有 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=\frac{3}{4}\left[(2n-1)3^{n-1}-1\right]$ ②

①-②得：$a_nb_n=\frac{3}{4}(4n+4)\cdot 3^{n-1}=(n+1)\cdot 3^n\ (n\geq 2)$，

$\because a_n=3^n$，$\therefore b_n=n+1(n\geq 2)$ ……………………………………5 分

当 $n=1$ 时，$a_1b_1=\frac{3}{4}\cdot(3\times 3-1)=6$，

$\because a_1=3$，$\therefore b_1=2$， 也符合 $b_n=n+1$，

$\therefore b_n=n+1(n\geq 1)$ ……………………………………6 分

（2）$\because c_n=\frac{n+1}{3^n}$

$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\cdots+\frac{n+1}{3^n}$ ③

$\frac{1}{3}T_n=\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}$ ④

③-④得：

$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$ ……………………………………………………8 分

$=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$

$=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{2\times3^{n+1}}$ ……………………………………………………11 分

$\therefore T_n=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\times3^n}<\frac{5}{4}$ ……………………………………………………12 分

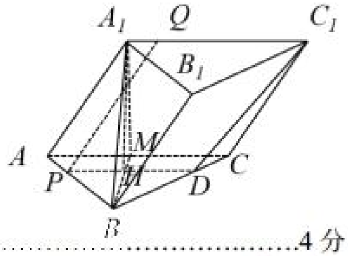
19.（12 分）

解析：

（1）作 $PD\parallel AC$，交 BC 于点 D，设 $A_1Q=AP=t\in(0,2)$，则 $BP=2-t$

$\because PD\parallel AC$，$\therefore\frac{PD}{AC}=\frac{BP}{AB}$，即 $\frac{PD}{2}=\frac{2-t}{2}\Rightarrow PD=2-t$ ……………………………………2 分

$\because PD\mathrel{\underline{\parallel}}QC_1$，连接 DC_1，



所以四边形 C_1QPD 为平行四边形，$\therefore PQ\parallel C_1D$，

$\because PQ\not\subset$ 平面 BCC_1B_1，且 $C_1D\subset$ 平面 BCC_1B_1，

$\therefore PQ\parallel$ 平面 BCC_1B_1 ……………………………………………………4 分

（2）取 AC 中点 M，连接 A_1M、BM、A_1B．

$\because AM=\frac{1}{2}AC=1$，$AA_1=2$，$\angle A_1AM=60^\circ$，

根据余弦定理得：$A_1M^2=AA_1^2+AM^2-2AA_1\cdot AM\cdot\cos60^\circ=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3$，

$\therefore A_1M=\sqrt{3}$，则 $A_1M\perp AC$ ……………………………………………………6 分

$\because\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore BM\perp AC$，

$\because A_1M\cap BM=M$，$\therefore AC\perp$ 平面 A_1BM．

可得：平面 $ABC\perp$ 平面 A_1BM ……………………………………………………7 分

在 $\triangle A_1BM$ 中，$A_1M=BM=\sqrt{3}$，$A_1B=2$，

作 $A_1H\perp BM$，交 BM 于点 H，$A_1H\perp$ 平面 ABC，

则 $S_{\triangle A_1BM}=\frac{2\times\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}\times A_1H}{2}$，$\therefore A_1H=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

$\because A_1Q\parallel$ 平面 ABC，所以点 Q 到平面 ABC 距离 $h=A_1H=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ……………………………9 分

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}$，

$\overrightarrow{QP}^2=\left(\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AP}\right)^2$

$=t^2+4+t^2+2\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{A_1A}+2\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{QA_1}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=2t^2+4+2\times t\times 2\times\frac{1}{2}+2\times 2\times t\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2\times t\times t\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=t^2+4$

$\therefore QP=\sqrt{t^2+4}$ ……………………………………………………………………11 分

$\sin\theta=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{t^2+4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+4}}$

$\because t\in(0,2)$，$\therefore\sqrt{t^2+4}\in\left(2,2\sqrt{2}\right)$

$\therefore\sin\theta\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ……………………………………………………………12 分

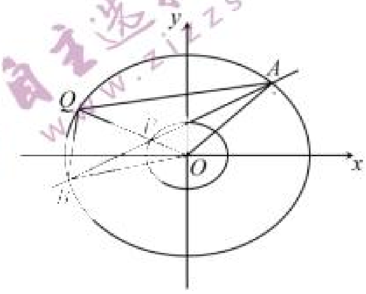
20.（12 分）

解析：

（1）由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，及 $a+c=\sqrt{3}+1$ 得：$a=\sqrt{3}$，$c=1$，$\therefore b=\sqrt{2}$．

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ ……………………………………………………2 分

（2）（i）证明：设 $P(x_0,y_0)$，令 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP}(\lambda>0)$，



则 $Q(\lambda x_0,\lambda y_0)$，

由 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{3}+\frac{y_0^2}{2}=1,\\ \frac{\lambda^2x_0^2}{3}+\frac{\lambda^2y_0^2}{2}=9,\end{cases}$ 得：$\lambda=3$ ……………………………4 分

$\therefore\frac{S_{\Delta AQP}}{S_{\Delta AOP}}=\frac{|QP|}{|OP|}=\frac{\lambda x_0-x_0}{x_0}=2$ 为定值…………………………………………………5 分

（ii）由（i）知 $S_{\Delta AQP}=2S_{\Delta AOP}$，同理 $S_{\Delta BQP}=2S_{\Delta BOP}$，$\therefore S_{\Delta AQB}=2S_{\Delta AOB}$ ……………………6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

①当直线 l 有斜率时，设 l：$y=kx+m$，

代入椭圆 E 的方程得：$\left(2+3k^2\right)x^2+6mkx+3m^2-54=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{6mk}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{3m^2-54}{2+3k^2}$ ……………………………………7 分

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{\left(\frac{6mk}{2+3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{3m^2-54}{2+3k^2}}$$

$$=|m|\sqrt{\frac{-6m^2+108+162k^2}{\left(2+3k^2\right)^2}}=\sqrt{6}\sqrt{\frac{\left(-m^2+18+27k^2\right)m^2}{\left(2+3k^2\right)^2}}$$

$\therefore S_{\Delta AOB}=\sqrt{6}\sqrt{\dfrac{9m^2}{2+3k^2}-\left(\dfrac{m^2}{2+3k^2}\right)^2}$ ……………………………………9 分

将 $l:y=kx+m$ 代入椭圆 C 的方程得：$\left(2+3k^2\right)x^2+6mkx+3m^2-6=0$，

$\because l$ 与椭圆 C 有公共点 P，$\therefore$ 由 $\Delta\ge0$ 得：$2+3k^2\ge m^2$，

令 $\dfrac{m^2}{2+3k^2}=t$，则 $t\in(0,1]$，$\therefore S_{\Delta AOB}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{9t-t^2}\le4\sqrt{3}$ ……………………………………11 分

②当 l 斜率不存在时，设 $l:x=n\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，

代入椭圆 E 的方程得：$y^2=18-\dfrac{2}{3}n^2$，$\therefore S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|n||y_1-y_2|=\sqrt{18n^2-\dfrac{2}{3}n^4}\le4\sqrt{3}$，

综合①②得△AOB 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$，

所以△AQB 面积的最大值为 $8\sqrt{3}$ ……………………………………12 分

21.（12 分）

解析：

（1）$f(2t-1)\ge2f(t)-3$ 等价于 $2(t-1)^2-a\ln(2t-1)+2a\ln t\ge0$ ……………………………………1 分

记 $h(t)=2(t-1)^2-a\ln(2t-1)+2a\ln t$，

$h'(t)=4(t-1)-\dfrac{2a}{2t-1}+\dfrac{2a}{t}=\dfrac{2(t-1)\left[2t(2t-1)+a\right]}{(2t-1)t}$ ……………………………………3 分

当 $t>1$ 时，$2t(2t-1)>2$，所以当 $a\ge-2$ 时，$h'(t)>0$ 在 $t>1$ 时恒成立，

即 $h(t)$ 在 $t>1$ 时为增函数，故 $t\ge1$ 时 $h(t)\ge h(1)=0$，

即不等式 $f(2t-1)\ge2f(t)-3$ 成立 ……………………………………4 分

当 $a<-2$ 时，令 $h'(t)=0$，得：$t=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{4}$，当 $t\in\left(1,\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{4}\right)$ 时 $h'(t)<0$，

则当$t\in\left(1,\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{4}\right)$时有$h(t)<h(1)=0$与已知矛盾.

综上：$a\geq -2$……………………………………………………………………………………5 分

（2）要证函数$f(x)$在$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$处的切线斜率大于 0.

即证$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，$f'(x)=2x+2-\dfrac{a}{x}$.

$\therefore f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=x_1+x_2+2-\dfrac{2a}{x_1+x_2}$ ①…………………………………………………6 分

又$x_1^2+2x_1-a\ln x_1=t=x_2^2+2x_2-a\ln x_2$，$\therefore a=\dfrac{(x_2-x_1)(x_1+x_2+2)}{\ln x_2-\ln x_1}$…………………………8 分

代入①得：$f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{x_1+x_2+2}{\ln x_2-\ln x_1}\left[\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\right]$，

令$\dfrac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，则$\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\ln t+\dfrac{2(1-t)}{1+t}$………………………………10 分

记$h(t)=\ln t+\dfrac{2(1-t)}{1+t}$，$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(1+t)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(1+t)^2}>0$，

$\therefore h(t)$在$t>1$时为增函数，则有$h(t)>h(1)=0$，

又$x_2>x_1>0$，$\therefore f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，

即函数$f(x)$在$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$处的切线斜率大于 0……………………………………………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22.（10 分）[选修 4—4：极坐标与参数方程]

解析：

（1）由$\rho^2=\dfrac{20}{5\sin^2\theta+4\cos^2\theta}$，可得：$5(\rho\sin\theta)^2+4(\rho\cos\theta)^2=20$，

而$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ $\therefore 5y^2+4x^2=20$，即$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

故曲线的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，该曲线是椭圆…………………………………………3 分

（2）将$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$代入椭圆方程$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

可得：$(4\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha)t^2+8\cos\alpha\cdot t-16=0$，

即：$(5-\cos^2\alpha)t^2+8\cos\alpha\cdot t-16=0$………………………………………………………5 分

由直线参数方程的几何意义，设$|PA|=|t_1|$，$|PB|=|t_2|$，

则$\begin{cases} t_1+t_2=\dfrac{8\cos\alpha}{\cos^2\alpha-5}, \\ t_1\cdot t_2=\dfrac{16}{\cos^2\alpha-5}, \end{cases}$……………………………………6分

$AB=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\left(\dfrac{8\cos\alpha}{\cos^2\alpha-5}\right)^2-4\times\dfrac{16}{\cos^2\alpha-5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5-\cos^2\alpha}$……………8分

$\because \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore \cos\alpha\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$AB\in\left(\dfrac{32\sqrt{5}}{19},\dfrac{32\sqrt{5}}{17}\right)$……………………10分

23.（10分）［选修4—5：不等式选讲］

解析：（1）由$|2|x-1|-3|\ge 1$，可得：$2|x-1|-3\ge 1$或$2|x-1|-3\le -1$……………………1分

解得：$2|x-1|\ge 4$，即$|x-1|\ge 2$，可知：$x-1\ge 2$，或$x-1\le -2$，

$\therefore x\ge 3$或$x\le -1$……………………………………………………3分

$2|x-1|-3\le -1$时，解得：$2|x-1|\le 2$，

即$|x-1|\le 1$，可知：$-1\le x-1\le 1$，$\therefore 0\le x\le 2$

综上所述，原不等式的解集是：$(-\infty,-1]\cup[0,2]\cup[3,+\infty)$……………………5分

（2）由$2a+12b+9c=11abc$，可知：$\dfrac{9}{ab}+\dfrac{2}{bc}+\dfrac{12}{ac}=11$……………………6分

由柯西不等式可知：$(ab+2bc+3ac)\left(\dfrac{9}{ab}+\dfrac{2}{bc}+\dfrac{12}{ac}\right)\ge(3+2+6)^2=121$，

$\therefore ab+2bc+3ac\ge\dfrac{121}{11}=11$……………………………………8分

当且仅当$\begin{cases} ab=3 \\ bc=1 \\ ac=2 \end{cases}$时，即：$\begin{cases} a=\sqrt{6} \\ b=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ c=\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}$时，$ab+2bc+3ac$取到最小值11……………………10分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。