

六校联盟高一年级联考 (2023. 04)

数学试卷

命题单位：河北定兴第三中学

(满分：150 分，测试时间：120 分钟)

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z \cdot (2+i) = 3+4i$ (其中 i 为虚数单位)，则 $|z| =$ ()

A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$

2. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相反， $\vec{b} = (3, -2)$ ， $|\vec{a}| = 3\sqrt{13}$ ，则 $\vec{a} =$ ()

A. $(-6, 4)$ B. $(-4, 6)$ C. $(-9, 6)$ D. $(9, -6)$

3. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 60^\circ$ ， $\sin^2 A = \sin B \sin C$ ，则 $\triangle ABC$ 一定是 ()

A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 等边三角形

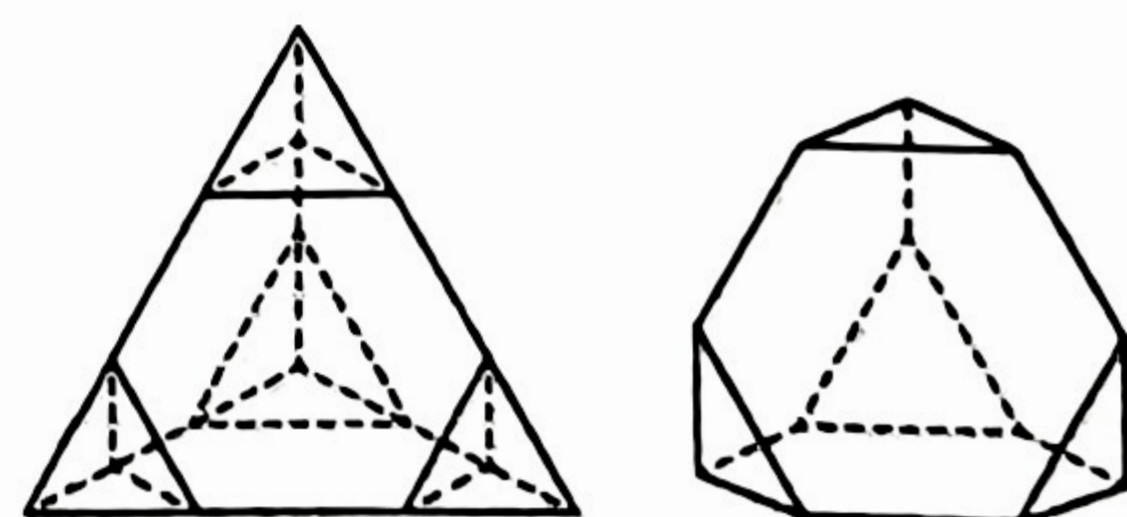
4. 已知 m, n 为实数， $2+i$ (i 为虚数单位) 是关于 x 的方程 $x^2 - mx + n = 0$ 的一个根，则 $m+n =$ ()

A. 9 B. 7 C. 5 D. 4

5. 设向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，定义 $\vec{a} \oplus \vec{b} = |\vec{a} \sin \theta + \vec{b} \cos \theta|$. 已知向量 $\vec{a}$ 为单位向量， $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ， $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ ，则 $\vec{a} \oplus \vec{b} =$ ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

6. 截角四面体是一种半正八面体，可由四面体经过适当的截角而得到. 已知棱长为 a 的正四面体体积为 $18\sqrt{2}$ ，如图，沿该四面体的棱的三等分点作平行于底面的截面截角得到所有棱长均为 $\frac{a}{3}$ 的截角四面体，则该截角四面体的体积为 ()



- A. $6\sqrt{2}$ B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{46\sqrt{2}}{3}$ D. $16\sqrt{2}$

7. 在锐角三角形 ABC 中, $B=60^\circ$, $AB=2$, 则 AB 边上的高的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 2\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \sqrt{3}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$

8. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$, 且对任意实数 x, y , $|\vec{a}-x\vec{b}|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\vec{b}-y\vec{a}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$ ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ D. $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ 或 $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 i 为虚数单位, 以下四个说法中正确的是 ().

- A. $3+i > 2+i$ B. $i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{2023}=-1$

C. 若 $z=(1+2i)^2$, 则复数 z 对应的点位于第四象限

D. 已知复数 z 满足 $|z-1|=|z+1|$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹为直线

10. 已知向量 $\vec{a}=(-6, 3)$, $\vec{b}=(2, t)$, 则下列说法不正确的是 ()

- A. 当 $\vec{a}+\vec{b}=(-4, 4)$ 时, $t=1$ B. 当 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 时, $t=4$

C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为钝角时, 则 t 的取值范围为 $(-\infty, 4)$

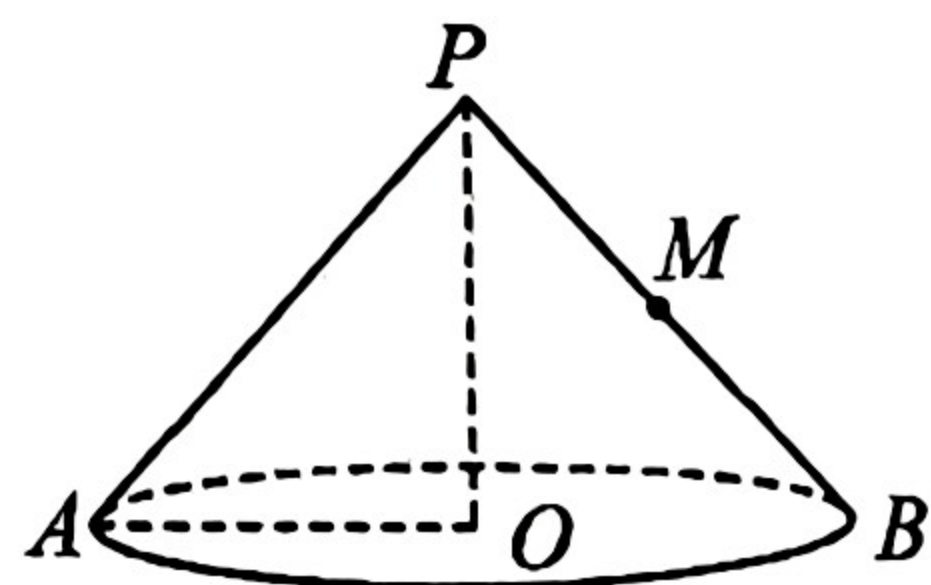
D. 当 $t=2$ 时, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

11. 如图, 已知圆锥的底面圆心为 O , 半径 $r=\sqrt{3}$, 圆锥的体积为 π , 内切球的球心为 O_1 , 则下列说法正确的是 ()

A. 侧面积为 $2\sqrt{3}\pi$

B. 内切球 O_1 的表面积为 $(84-48\sqrt{3})\pi$

C. 过点 P 作平面 α 截圆锥的截面面积的最大值为 $\sqrt{3}$



11 题图

D. 设母线 PB 中点为 M , 从 A 点沿圆锥表面到 M 的最近路线长为 $\sqrt{5-4\cos\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c=6$, 点 D 满足

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, 且 $c\sin A = \sqrt{3}a\cos C$, O 是 $\triangle ABC$ 外心, 则下列判断正确的是()

A. $C = \frac{\pi}{3}$

B. $\triangle ABC$ 的外接圆半径是 $4\sqrt{3}$

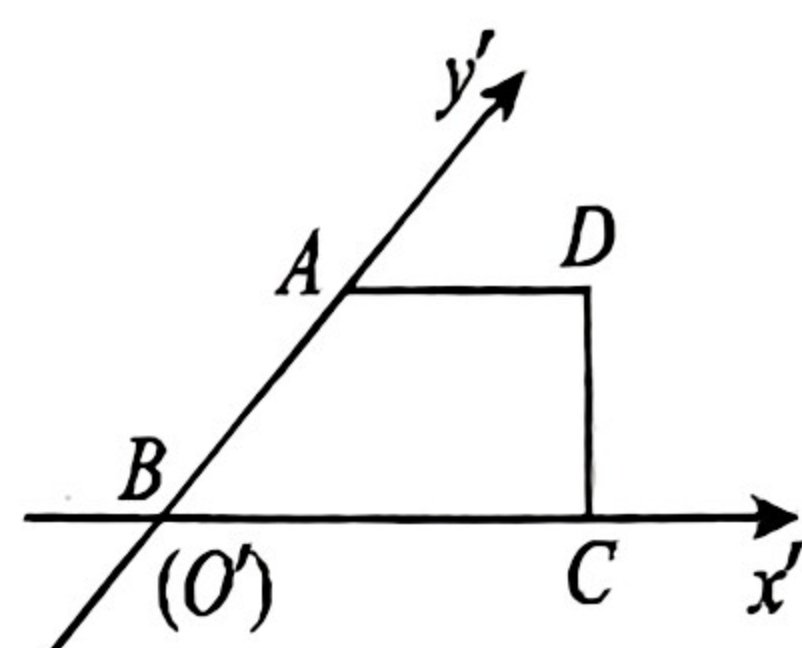
C. $OD=2$

D. CD 的最大值为 $2\sqrt{7}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知复数 $z = 3 + 2i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

14. 有一块多边形的菜地, 它的水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形 (如图) $\angle ABC = 45^\circ$, $AD = DC = 1$,

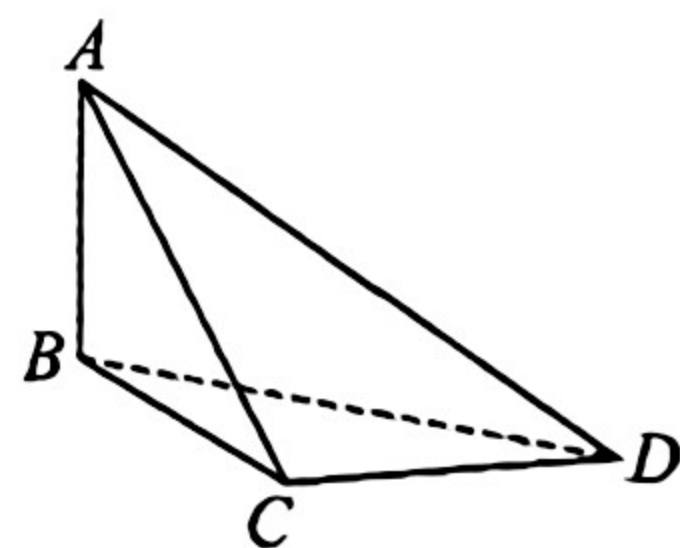


14 题图

$DC \perp BC$, 则这块菜地的面积为_____.

15. 已知点 P 在棱长为 1 的正方体表面上运动, AB 是该正方体外接球的一条直径, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为_____.

16. 兰州黄河楼, 位于黄河兰州段大拐弯处, 是一座讲述黄河故事的人文地标, 是传承和记录兰州文化的精神产物, 展现了甘肃浓厚的历史文化底蕴及黄河文化的独特魅力. 某同学为了估算该楼的高度, 采用了如图所示的方式进行测量: 在地面选取相距 90 米的 C, D 两观测点, 且 C, D 与黄河楼底部 B 在同一水平面上, 在 C, D 两观测点处测得黄河楼顶部 A 的仰角分别为 $45^\circ, 30^\circ$, 并测得 $\angle BCD = 120^\circ$, 则黄河楼 AB 的估计高度为_____米.



16 题图

四、解答题: 本题共六小题, 共 70 分. 需写出必要的文字说明、证明过程.

17. (10 分) 已知复数 $z = \frac{3+2mi}{1-i}$ ($m \in R$), i 是虚数单位).

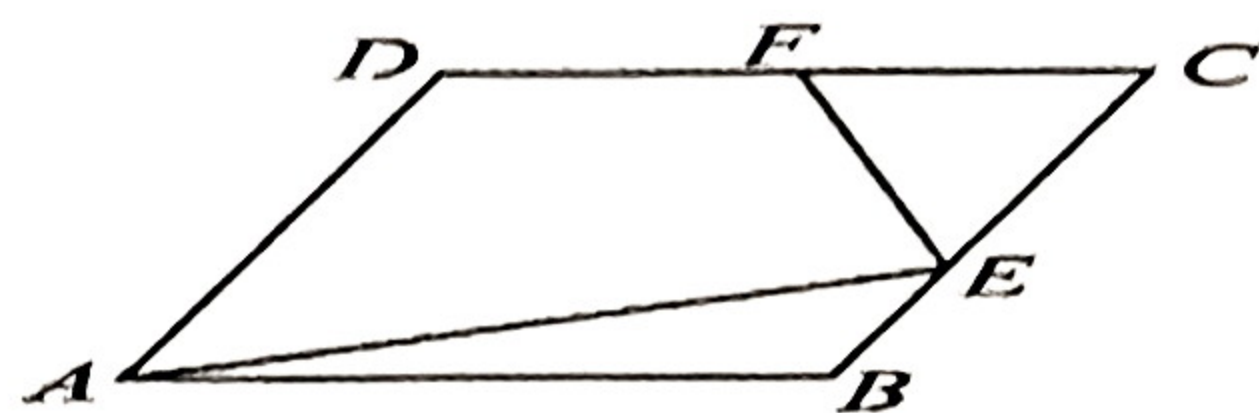
(1) 若 z 是纯虚数, 求 m 的值和 $|z|$; (2) 设 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数, 复数 $\bar{z} - 2z$ 在复平

面上对应的点位于第二象限，求 m 的取值范围.

18. (12 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$.

(1) 若 $\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，求 $2x + 9y$ 的值；

(2) 若 $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$ ，求 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$.



18 题图

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c ，且满足 $b \sin A = a \cos \frac{A+C}{2}$. (1) 求 B ; (2) 若 $b = 2\sqrt{5}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3$, BD 是 $\triangle ABC$ 的中线，求 BD 的长.

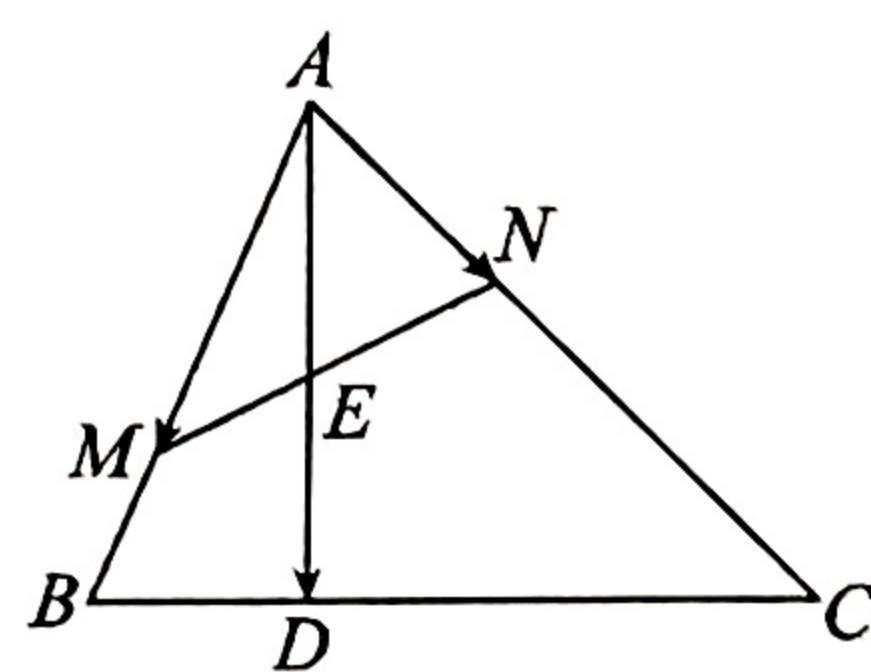
20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边，已知 $\vec{m} = (b-c, a-c)$, $\vec{n} = (\sin B + \sin C, -\sin A)$ ，且 $\vec{m} \perp \vec{n}$.

(1) 求角 B 的值; (2) 若 $b = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

21. (12 分) 已知 $m > 0, n > 0$ ，如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 M, N 满足 $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AC}$ ， D 是线段 BC 上一点， $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ，点 E 为 AD 的中点，且 M, N, E 三点共线.

(1) 求 $3m + 6n$ 的最小值.

(2) 若点 O 满足 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ，证明: $OE \parallel BC$.



21 题图

22. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，满足

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b \sin B}{a \sin B + b \sin C} = 1 \quad (1) \text{ 求角 } C;$$

(2) CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线，若 $CD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，求 c 的值.