

2023 年乌鲁木齐高三年级第一次质量监测答案及评分标准

(理科数学)

一、选择题 (每小题 5 分, 共 60 分)

1~5. BCADC 6~10. ABBDA 11~12. DC

二、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 60 14. $x = -3$ 15. $-2e$ 16. $\frac{625}{4}$

三、解答题

17. (1) 由已知可得: $b^2 + a^2 - c^2 = 3b$, $\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3b}{2ab} = \frac{1}{2}$,

$0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$; ...6 分

(2) 由正弦定理可得, $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin A}$, $\frac{c}{\cos A} = 3\sqrt{3}$, $\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin A \cdot \cos A} = 3\sqrt{3}$

$\sin 2A = 1$, 又 $\because 0 < A < \frac{2\pi}{3}$, $\therefore 0 < 2A < \frac{4\pi}{3}$, $\therefore 2A = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{4}$,

由 $\frac{c}{\cos A} = 3\sqrt{3}$, 得 $c = 3\sqrt{3} \cos A = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, $\sin B = \sin(A+C) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{27 + 9\sqrt{3}}{8}$12 分

18. (1) 在线段 PB 取点 M , 使 $PM = 2MB$, $\therefore$ 在 $\triangle PBC$ 中有 $MF = \frac{2}{3}BC = 2$ 且 $MF \parallel BC$,

在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $\therefore MF \parallel AD$ 且 $MF = AD$,

即四边形 $ADFM$ 是平行四边形, $\therefore FD \parallel AM$, 又 $DF \not\subset$ 平面 PAB , $AM \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore DF \parallel$ 平面 PAB ; ...6 分

(2) 如图, 以点 A 为原点, 建立空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$,

$\because$ 点 E 是线段 PD 的中点, $PF = 2FC$, $\therefore$ 点 $E(0,1,1)$, $F\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\therefore \overrightarrow{AE} = (0,1,1), \overrightarrow{AF} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, 设平面 AEF 的一个法向量为 $n_1 = (x, y, z)$

由 $\begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ n_1 \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} y + z = 0 \\ \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}$, 可取 $n_1 = (1, -2, 2)$

易知 $n_2 = (1, 0, 0)$ 是平面 PAE 的一个法向量,

$$\text{则 } \cos \langle n_1, n_2 \rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{1}{3}, \therefore \sin \langle n_1, n_2 \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle n_1, n_2 \rangle} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{即二面角 } F-AE-P \text{ 的正弦值为 } \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \cdots 12 \text{ 分}$$

$$19. (1) E(x) = -1 \times 0.1 + 2 \times 0.6 = 1.1, E(y) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 = 1.1,$$

$$D(x) = (-1)^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.6 - 1.1^2 = 1.29, D(y) = 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 - 1.1^2 = 0.69$$

$$E(x) = E(y), D(x) > D(y), \therefore \text{建议选乙股票}. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

(2) 设投资甲股票 a 元, 投资乙股票 $(10000 - a)$ 元,

$$\text{则 } E(ax) + E((10000 - a)y) = aE(x) + (10000 - a)E(y) = 11000 \text{ (元)}$$

$$\text{而 } D(ax) + D((10000 - a)y) = a^2 D(x) + (10000 - a)^2 D(y) = a^2 \times 1.29 + (10000 - a)^2 \times 0.69$$

$$= 1.98a^2 - 138000a + 0.69 \times 10^8$$

$$\text{当 } a = -\frac{-13800}{2 \times 1.98} \approx 3485 \text{ 时, } D(ax) + D((10000 - a)y) \text{ 取得最小值.}$$

$$\therefore \text{应当投资甲股票 3485 元, 乙股票 6515 元}. \quad \cdots 12 \text{ 分}$$

(或者: 投资甲股票 3500 元, 乙股票 6500 元, 也算对)

$$20. (1) \text{设椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), C \text{ 过 } A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$$

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{4a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{得 } a^2 = 2, b^2 = 1, \text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1; \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

(2) 设直线 MN 的方程为 $y = k(x - 1)$, 则 $Q(2, k)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

$$\text{有 } k_1 = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 1}, k_3 = k - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x - 1) \end{cases}, \text{得 } (1 + 2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0, \Delta > 0,$$

$$\text{有 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{1 + 2k^2}$$

$$\begin{aligned} k_1 k_2 k_3 &= \frac{k(x_1-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1-1} \cdot \frac{k(x_2-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2-1} \cdot \left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left[k^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}k \frac{(x_1+x_2)-2}{(x_1x_2-(x_1+x_2)+1)} + \frac{1}{2(x_1x_2-(x_1+x_2)+1)}\right] \left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left[k^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}k \frac{-2}{\frac{-1}{1+2k^2}} + \frac{1}{2 \frac{-1}{1+2k^2}}\right] \left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \left(k^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}k - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

当 $k = \frac{\sqrt{2}}{8}$ 时, $k_1 k_2 k_3$ 有最大值 $\frac{9\sqrt{2}}{32}$12 分

21. (1) $\because f(1) = a+b, y = -3x = -3, \therefore a+b = -3$

$\because f'(x) = \frac{2}{x} + a - \frac{b}{x^2}, \therefore f'(1) = 2+a-b$, 由切线方程为 $y = -3x$, $\therefore 2+a-b = -3$

$\therefore \begin{cases} a+b = -3 \\ 2+a-b = -3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$, $\therefore f(x) = 2\ln x - 4x + \frac{1}{x}$; ...5 分

(2) $\because f(x) = 2\ln x - 4x + \frac{1}{x}, \therefore f'(x) = \frac{2}{x} - 4 - \frac{1}{x^2}$

由已知任意 $\forall x \in [1, +\infty)$, $f(x) - f'(x) + 3 \leq me^{1-x} + \frac{1}{x}$ 成立

令 $g(x) = f(x) - f'(x) + 2x - \frac{1}{x} - 1 = 2\ln x - 4x + \frac{1}{x} - \frac{2}{x} + 4 + \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{1}{x} - 1$

$$= 2\ln x - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$g'(x) = \frac{2}{x} - 2 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-2(x-1)^2(x+1)}{x^3} \leq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减

所以 $g(x) \leq g(1) = 0$, 即 $f(x) - f'(x) \leq -2x + \frac{1}{x} + 1$ 有 $f(x) - f'(x) + 3 \leq 4 - 2x + \frac{1}{x} \leq 2e^{1-x} + \frac{1}{x}$,

所以 $m \geq 2$ 时满足题意, 若 $m < 2$, 存在 $x=1$ 时原式有 $-4-1+1+7 \leq m+1$

即 $m \geq 2$ 与 $m < 2$ 矛盾, 不满足题意,

所以 $m \geq 2$12 分

22. (1) 由直线 $l: x+y=1$ 得 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1 \therefore$ 直线 l 的极坐标方程为 $\rho = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$

由曲线 $C: \begin{cases} x = 1 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的参数方程化为普通方程得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2 \cos \theta$; ...5 分

(2) 由(1)知 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}, \alpha\right), B(2 \cos \alpha, \alpha)$, 又 $\because |OB| = 2|OA| \therefore \frac{2}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cos \alpha$

高三第一次质量监测理科数学参考答案及评分标准第 3 页 (共 4 页)

即 $\sqrt{2} \cos \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = 1$ 得 $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$

又 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$. …10 分

23. (1) 当 $a=3$ 时, $f(x) = |x-3| + 2|x+1|$, 则 $f(x) = \begin{cases} 1-3x, & x \leq -1 \\ x+5, & -1 < x < 3 \\ 3x-1, & x \geq 3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x \leq -1 \\ 1-3x > 5 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} -1 < x < 3 \\ x+5 > 5 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x \geq 3 \\ 3x-1 > 5 \end{cases}$ 解得 $x < -\frac{4}{3}$, 或 $0 < x < 3$, 或 $x \geq 3$

$\therefore f(x) > 5$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{4}{3} \right) \cup (0, +\infty)$; …5 分

(2) 由题意 $g(x) = |x-a| + 2|x+1| - |x+1| = |x-a| + |x+1| \geq |(x-a) - (x+1)| = |a+1|$

$\because a > 0 \therefore g(x)_{\min} = a+1 = M$

又 $\because b+c = M-a \therefore b+c = 1$, 则 $b+c+1 = 2$, 由 $b > 0, c > -1$, 得 $c+1 > 0$

$\therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{c+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{b+c+1}{b} + \frac{b+c+1}{c+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c+1}{b} + \frac{b}{c+1} + 1 \right) \geq \frac{1}{2} \left(2 + 2\sqrt{\frac{c+1}{b} \cdot \frac{b}{c+1}} \right) = 2$

当且仅当 $b=c+1$ 即 $b=1, c=0$ 时取等号, $\therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{c+1} \geq 2$ 成立. …10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线