

开封市 2023 届高三年级第一次模拟考试 理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} < 2^x < 8\right\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{1, 0\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$

2. 设命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq x+1$, 则 $\neg p$ 是

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \leq x+1$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, e^x < x+1$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, e^x \leq x+1$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, e^x < x+1$

3. 若 $\frac{3+4i}{z}$ 是纯虚数，则复数 z 可以是

- A. $-3+4i$ B. $3-4i$ C. $4+3i$ D. $4-3i$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 边上一点，且 $BD = \frac{1}{3}BC$, 则 $\overrightarrow{AD} =$

- A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ C. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ D. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

5. 已知圆锥的底面半径为 1, 其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. $\frac{\pi}{3}$

6. 如图为甲、乙两位同学在 5 次数学测试中成绩的茎叶图，已知两位同学的平均成绩相等，则甲同学成绩的方差为

- A. 4 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$

甲	乙
9 m	8 2 9
2 1 0	9 0 1 8

7. 已知 $\begin{cases} x+y-3 \leq 0, \\ x-y-1 \geq 0, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

8. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，则满足 $f(x) < f(x-2)$ 的 x 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(1, +\infty)$

理科数学 第 1 页 (共 4 页)

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n - 2$, 若 $p + q = 5 (p, q \in \mathbb{N}^+)$, 则 $a_p a_q =$

- A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

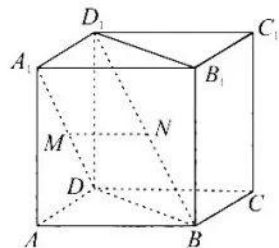
10. 已知点 $P(x, y)$ 到点 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$ 和点 $F_2(\sqrt{3}, 0)$ 的距离之和为 4, 则 xy

- A. 有最大值 1 B. 有最大值 4 C. 有最小值 1 D. 有最小值 -4

11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M, N 分别是 A_1D_1 , D_1B 的中点, 则下述结论中正确的个数为

- ① $MN \parallel$ 平面 $ABCD$;
② 平面 $A_1ND \perp$ 平面 D_1MB ;
③ 直线 MN 与 B_1D_1 所成的角为 45° ;
④ 直线 D_1B 与平面 A_1ND 所成的角为 45° .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



12. 在数学中, 布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理, 它可应用到有限维空间, 并且是构成一般不动点定理的基石. 简单地讲就是对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$, 存在点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么我们称该函数为“不动点”函数. 若函数 $f(x) = x(ae^x - \ln x)$ 为“不动点”函数, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, \frac{1}{e}]$ C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, e]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若函数 $f(x) = A \sin x - \cos x$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $f(\frac{5\pi}{12}) =$ _____.

14. 已知点 $A(1, 0), B(2, 2), C$ 为 y 轴上一点, 若 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

15. 3D 打印是快速成型技术的一种, 它是一种以数字模型文件为基础, 运用粉末状金属或塑料等可粘合材料, 通过逐层打印的方式来构造物体的技术. 如图所示的塔筒为 3D 打印的双曲线型塔筒, 该塔筒是由离心率为 $\sqrt{5}$ 的双曲线的一部分围绕其旋转轴逐层旋转打印得到的, 已知该塔筒(数据均以外壁即塔筒外侧表面计算)的上底直径为 6cm, 下底直径为 9cm, 高为 9cm, 则喉部(最细处)的直径为 _____ cm.



16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+2} + (-1)^n a_n = 2 (n \in \mathbb{N}^+)$. 记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{100} =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a \cos \frac{B+C}{2} = b \sin A, 2a = 3b$.

(1) 求 $\cos B$ 的值;

(2) 若 $a = 3$, 求 c .

18. (12 分)

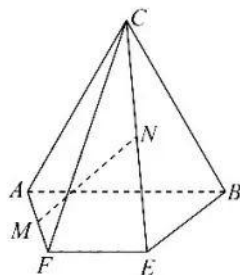
甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动, 每轮活动由甲、乙各猜一个成语, 已知甲每轮猜对的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙每轮猜对的概率为 p . 在每轮活动中, 甲和乙猜对与否互不影响, 各轮结果也互不影响. 已知“星队”在第一轮活动中猜对 1 个成语的概率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 p 的值;

(2) 记“星队”在两轮活动中猜对成语的总数为 X , 求 X 的分布列与期望.

19. (12 分)

如图, $\triangle ABC$ 是正三角形, 在等腰梯形 $ABEF$ 中, $AB \parallel EF$, $AF = EF = BE = \frac{1}{2}AB$. 平面 $ABC \perp$ 平面 $ABEF$, M, N 分别是 AF, CE 的中点, $CE = 4$.



(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求二面角 $M-AB-N$ 的余弦值.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin x - ax$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 当 $a = 1$ 时, 求 $g(x) = f(x) - \ln(x+1)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值;

(3) 证明: $\sin \frac{1}{2} - \sin \frac{1}{3} + \sin \frac{1}{4} - \cdots + \sin \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{2}$.

21. (12 分)

如图 1 所示是一种作图工具, 在十字形滑槽上各有一个活动滑标 M, N , 有一根旋杆将两个滑标连成一体, $|MN|=3$, D 为旋杆上的一点且在 M, N 两点之间, 且 $|ND|=\lambda|DM|$, 当滑标 M 在滑槽 EF 内做往复运动, 滑标 N 在滑槽 GH 内随之运动时, 将笔尖放置于 D 处进行作图, 当 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 时分别得到曲线 C_1 和 C_2 , 如图 2 所示, 设 EF 与 GH 交于点 O , 以 EF 所在的直线为 x 轴, 以 GH 所在的直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系.

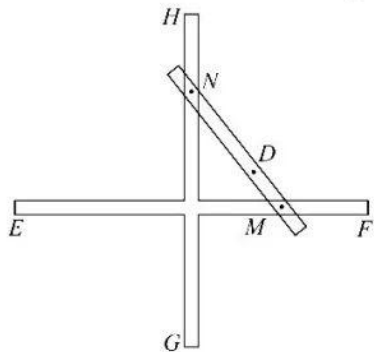


图1

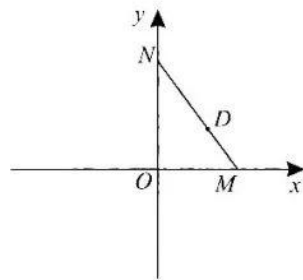


图2

(1) 求曲线 C_1 和 C_2 的方程;

(2) 已知直线 l 与曲线 C_1 相切, 且 l 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 记 $\triangle OAB$ 的面积为 S , 证明: $S \leq \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2pt \\ y=2pt^2 \end{cases}$ (t 为参数), $(2, 4)$ 为曲线 C 上一点的坐标.

(1) 将曲线 C 的参数方程化为普通方程;

(2) 过点 O 任意作两条相互垂直的射线分别与曲线 C 交于点 A, B , 以直线 OA 的斜率 k 为参数, 求线段 AB 的中点 M 的轨迹的参数方程, 并化为普通方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = x + a + 2|x-1|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若 $a>0, b>0$ 时, 对任意 $x \in [1, 2]$ 使得不等式 $f(x) > x^2 - b + 1$ 恒成立, 证明:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 > 2.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线