鄂南高中 黄冈中学 黄石二中 荆州中学 龙泉中学
武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学
2023 届高三湖北十一校第二次联考
数学试题

命题学校：荆州中学　命题人：王俊 陈静 魏士芳
审题学校：孝感高中　审题人：陈文科 李晓芳 秦浩

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\,|\,x^2-2x>0\}$ 和 $N=\{x\,|\,\ln(x+1)>1\}$，则（　　）

A. $N\subseteq M$　　B. $M\subseteq N$
C. $M\cap N=(e-1,+\infty)$　　D. $M\cup N=(-\infty,0)\cup(e-1,+\infty)$

2. 复数 $Z=\dfrac{i^{2023}}{1\text{-}2i}$ 在复平面内所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\vec{m}=(3,-4),\vec{n}=(-12,5)$, 则 $\vec{m}\cdot\vec{n}+|\vec{n}|=$（　　）

A. -56　　B. 69　　C. -43　　D. 43

4. 已知 $a>0$，$b>0$，且 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{1+b}=1$，那么 $a+b$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{2}-1$　　B. 2　　C. $2\sqrt{2}+1$　　D. 4

5. 在“$2,3,5,7,11,13,17,19$”这 8 个素数中，任取 2 个不同的数，则这两个数之和仍为素数的概率是（　　）

A. $\dfrac{3}{28}$　　B. $\dfrac{5}{28}$　　C. $\dfrac{1}{7}$　　D. $\dfrac{3}{14}$

6. 已知 $w>0$，函数 $f(x)=3\sin(wx+\dfrac{\pi}{4})-2$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 上单调递减，则 w 的取值范围是（　　）

A. $(0,\dfrac{1}{2}]$　　B. $(0,2]$　　C. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$　　D. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}]$

7. 已知 $a=\dfrac{0.2}{\pi}$，$b=\dfrac{0.4}{e^2}$（$e\approx 2.718$），$c=\sin 0.1$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

8. 甲、乙两个圆锥的底面积相等，侧面展开图的圆心角之和为 2π，侧面积分别为 $S_{甲}$、$S_{乙}$，体积分别为 $V_{甲}$、$V_{乙}$，若 $\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则 $\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}$ 等于（　　）

A. $\sqrt{10}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{5}{6}\sqrt{10}$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 设 $\bar{A},\bar{B}$ 分别为随机事件 A,B 的对立事件，已知 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，则下列说法正确的是（　）

A. $P(B\mid A)+P(\bar{B}\mid A)=1$

B. $P(B\mid A)+P(B\mid \bar{A})=0$

C. 若 A,B 是相互独立事件，则 $P(A\mid B)=P(A)$

D. 若 A,B 是互斥事件，则 $P(B\mid A)=P(B)$

10. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x}$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 没有零点

B. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 的图象位于 x 轴下方

C. $f(x)$ 存在单调递增区间

D. $f(x)$ 有且仅有两个极值点

11. 已知椭圆 $C:\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(0<b<\sqrt{3})$ 的两个焦点分别为 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$（其中 $c>0$），点 P 在椭圆 C 上，点 Q 是圆 $E:x^2+(y-4)^2=1$ 上任意一点，$|PQ|+|PF_2|$ 的最小值为 2，则下列说法正确的是（　　）

A. 椭圆 C 的焦距为 2

B. 过 F_2 作圆 E 切线的斜率为 $\pm2\sqrt{2}$

C. 若 A、B 为椭圆 C 上关于原点对称且异于顶点和点 P 的两点，则直线 PA 与 PB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{5}$

D. $|PQ|-|PF_2|$ 的最小值为 $4-2\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln(x+2)+\ln a-2$. 以下说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极值, 则函数在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. 若 $f(x)\geq0$ 恒成立，则 $a\in[e,+\infty)$

C. 若 $f(x)$ 仅有两个零点，则 $a\in[e,+\infty)$

D. 若 $f(x)$ 仅有 1 个零点，则 $a=1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $(1-x)^8=a_0+a_1(1+x)+a_2(1+x)^2+\dots+a_8(1+x)^8$，则 $a_5=$________.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(1,a),B(3,a+4)$，若圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个不同的点 C，使得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{5}$，则实数 a 的取值范围是________.

15. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)=x^2-m$，$g(x)=6\ln x-4x$，设曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$在公共点处的切线相同，则实数$m=$________.

16. 已知抛物线$x^2=4y$，弦AB过抛物线的焦点F，过两点A、B分别作准线l的垂线，垂足分别为C、D，设AB的中点为N，线段AB的垂直平分线交y轴于L，则$\frac{|FL|}{|AB|}=$___；若CD的中点为R，则$\frac{|NL|}{|RF|}=$___.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）已知数列$\{a_n\}$，若_____.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；（2）求数列$\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\}$的前n项和T_n.

从下列个条件中任选一个补充在上面的横线上，然后对题目进行求解.

① $a_1+a_2+a_3+\cdots a_n=n^2$

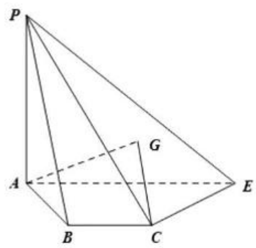
② $a_1=1,a_4=7,2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$

③ $a_1=1$，点$A(n,a_n),B(n+1,a_{n+1})$在斜率是2的直线上

18.（12分）已知在ΔABC中，其角A、B、C所对边分别为a、b、c，且满足$b\cos C+\sqrt{3}b\sin C=a+c$.

（1）若$b=\sqrt{3}$，求ΔABC的外接圆半径；

（2）若a+c=$4\sqrt{3}$，且$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$，求$\Delta ABC$的内切圆半径



19.（12分）如图，已知四棱锥$P-ABCE$中，$AB=1$，$BC=2$，$BE=2\sqrt{2}$，$PA\perp$平面$ABCE$，平面$PAB\perp$平面PBC

(1)证明：$AB\perp BC$；

(2)若$PA=2\sqrt{2}$，且$AC=AE$，G为ΔPCE的重心.求直线CG与平面PBC所成角的正弦值.

20.（12分）某企业新研发了一种产品，产品的成本由原料成本及非原料成本组成．每件产品的非原料成本y（元）与生产该产品的数量x（千件）有关，经统计得到如下数据：

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	56.5	31	22.75	17.8	15.95	14.5	13	12.5

根据以上数据绘制了散点图.观察散点图，两个变量间的关系考虑用反比例函数模型$y=a+\frac{b}{x}$和指数函数

模型 $y=ce^{dx}$ 分别进行拟合．已求得用指数函数模型拟合的回归方程为 $y=48.376e^{-0.195x}$，$\ln y$ 与 x 的相关系数 $r_1=-0.929$．

（1）用反比例函数模型求 y 关于 x 的回归方程；

（2）若 y 与 $\frac{1}{x}$ 的相关系数 $r_2\approx 0.993$，用相关系数判断上述两个模型哪一个拟合效果更好，并用其估计产量为 10 千件时每件产品的非原料成本；

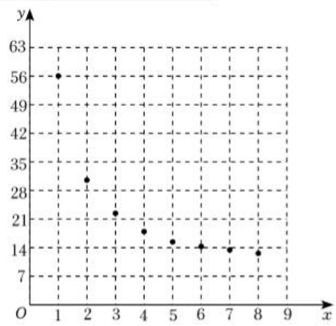
（3）根据企业长期研究表明，非原料成本 y 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用样本平均数 $\bar{y}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$，若非原料成本 y 在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 之外，说明该成本异常，并称落在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 之外的成本为异样成本，此时需寻找出现异样成本的原因．利用估计值判断上面表格中非原料成本数据，哪些需要寻找出现异样成本的原因？

参考数据（其中 $u_i=\frac{1}{x_i}$）：

$\bar{u}$	$\bar{u}^2$	$\sum_{i=1}^{8}u_i^2$	$\sum_{i=1}^{8}y_i$	$\sum_{i=1}^{8}y_i^2$	$\sum_{i=1}^{8}u_iy_i$	$\sqrt{193.194}$
0.34	0.115	1.53	184	5777.555	93.06	13.9

参考公式：对于一组数据 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，…，$(x_n，y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}，\quad \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$



21.（12 分）已知点 $A(2,2)$ 为抛物线 Γ：$y^2=2px$ 上的点，B,C 为抛物线 Γ 上的两个动点，Q 为抛物线 Γ 的准线与 x 轴的交点，F 为抛物线 Γ 的焦点.

（1）若 $\angle BOC=90^\circ$，求证：直线 BC 恒过定点；

（2）若直线 BC 过点 Q，B,C 在 x 轴下方，点 B 在 Q,C 之间，且 $\tan\angle BFC=\frac{24}{7}$，求 ΔAFC 的面积和 ΔBFC 的面积之比.

22.（12 分）已知 $n\in N^*$, 函数 $f_n(x)=x-n\ln x$ 有 2 个零点，记为 $x_n,y_n(x_n<y_n)$.

（1）证明：$y_n-x_n<y_{n+1}-x_{n+1}$；

（2）对于 $0<\alpha<\beta$, 若存在 θ，使得 $f_n(\beta)-f_n(\alpha)=f_n'(\theta)(\beta-\alpha)$, 试比较 $\alpha+\beta$ 与 2θ 的大小.

2023 届高三湖北十一校第二次联考

数学试题参考答案

一：选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	D	C	C	C	D	B	B	AC	BC	ABD	AB

二：填空题

13. -448.　　14. $(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$　　15. 5　　16. $\frac{1}{2}$，1

三：解答题

17. 解：若选①，

则（1）由 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2$，

所以 $n\geqslant 2$，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2$，　　……………………1 分

两式相减可得：$n\geqslant 2$，$a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，　　……………………3 分

而在 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2$ 中令 $n=1$ 可得：$a_1=1$，符合上式，

故 $a_n=2n-1$.　　……………………5 分

（2）由 (1) 知：$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，　　…………7 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.　　……………10 分

若选②

则 (1) 由 $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$ 可得：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，又因为 $a_1=1$，

$a_4=7$，所以 $a_4-a_1=3d$，即 $d=2$，所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.　……………5 分

(2) 同上.

若选③，则 (1) 由点 $A(n,a_n)$，$B(n+1,a_{n+1})$ 在斜率是 2 的直线上得：$\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=2$，即

$a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列且 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.…………………5 分

(2) 同上.

18. 解：（1）因为 $\dfrac{b\cos C+\sqrt{3}b\sin C}{a+c}=1$，所以 $b\cos C+\sqrt{3}b\sin C-a-c=0$，

所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin A-\sin C=0$， … ……………………1 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin B\sin C-\sin(B+C)-\sin C=0$，

所以 $\sqrt{3}\sin B\sin C-\cos B\sin C-\sin C=0$， ……………………2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$， ……………………4 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$ 外接圆半径 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=2$． 所以 R=1 ……………………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6$，有由题可知 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $ac=12$， ……………………7 分

又因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$， $a+c=4\sqrt{3}$ 可得 $b=2\sqrt{3}$， ……………………9 分

因为 $S=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B=3\sqrt{3}$．

由 ΔABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=\dfrac{1}{2}ac\cdot\sin B$，得 $r=1$。 ……………………12 分

19.（1）.过 A 作 $AD\perp PB$ 于 D，$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PBC

$\therefore AD\perp$ 平面 PBC，又 $BC\in$ 平面 PBC

$\therefore AD\perp BC$ ……………………2 分

又$\because PA\perp$ 平面 $ABCE$， $BC\subseteq$ 平面 $ABCE$

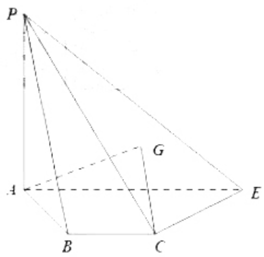
$\therefore PA\perp BC$ ……………………4 分

$\therefore BC\perp$ 平面 PAD，又$\because AB\subseteq$ 平面 PAD

$\therefore BC\perp AB$ ……………………5 分

（2）.以 B 为坐标原点，BA,BC 为 x,y 轴，过 B 平行于 PA 的直线为 Z 轴

建立空间直角坐标系，



$\therefore B(0,0,0),A(0,1,0),C(0,2,0)\ P(1,0,2\sqrt{2})$

又设 $E(x,y,0),\because BE=2\sqrt{2},\therefore x^2+y^2=8$ ①

$\therefore AC=AE,\therefore (x-1)^2+y^2=5$ ②

2

由①②得 $x=2,y=2,\therefore E(2,2,0)$ ………………………7 分

又 $P(1,0,2\sqrt{2})$，故 $G(1,\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ，$\vec{CG}=(1,-\frac{2}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3})$ ………………………8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{BP}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{BC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2\sqrt{2}z=0\\ 2y=0\end{cases}$ 令 $x=1$，$\therefore\vec{n}=(-2\sqrt{2},0,1)$ ………………………10 分

设 $\overrightarrow{CG}$ 与平面所成的角为 θ .

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CG}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{CG}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{4\sqrt{42}}{63}$. ………………………12 分

20. 解：（1）令 $u=\frac{1}{x}$，则 $y=a+\frac{b}{x}$ 可转化为 $y=a+bu$，

因为 $\bar{y}=\frac{184}{8}=23$，所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}u_iy_i-8\bar{u}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{8}u_i^2-8\bar{u}^2}=\dfrac{93.06-8\times0.34\times23}{1.53-8\times0.34^2}=50$，

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{u}=6$，所以 $y=6+50u$，所以 y 关于 x 的回归方程为 $y=6+\frac{50}{x}$； ……4 分

（2）因为 $|r_1|<|r_2|$，所以用反比例函数模型拟合效果更好，

把 $x=10$ 代入回归方程得 $y=11$（元），

所以产量为 10 千件时每件产品的非原料成本约为 11 元； ………………………7 分

（3）因为 $\bar{y}=\frac{184}{8}=23$，所以 $\mu=23$，

因为样本标准差为 $s=\sqrt{\frac{1}{8}(\sum_{i=1}^{8}y_i^2-8\bar{y}^2)}=\sqrt{\frac{1}{8}(5777.55-8\times23\times23)}\approx\sqrt{193.194}=13.9$，

所以 $\sigma=13.9$，所以非原料成本 y 服从正态分布 $N(23,\ 13.9^2)$， ………………………9 分

所以 $(\mu-\sigma,\ \mu+\sigma)=(23-13.9,\ 23+13.9)=(9.1,\ 36.9)$，

因 56.5 在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 之外，所以需要此非原料成本数据寻找出现异样成本的原因．…12 分

21.（1)：设直线 BC 的方程为 $x=my+n,B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$

将 $A(2,2)$ 代入抛物线方程得 $p=1$ …………1 分

联立$\begin{cases}x=my+n\\y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2my-2n=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\\y_1+y_2=2m\\y_1y_2=-2n\end{cases}$

$\because \angle BOC=90^\circ\ \therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2=0$ …………2 分

$\Rightarrow(my_1+n)(my_2+n)+y_1y_2=0$

$\Rightarrow(m^2+1)y_1y_2+mn(y_1+y_2)+n^2=0$

$\Rightarrow -2m^2n-2n+2m^2n+n^2=0\Rightarrow n^2-2n=0\Rightarrow n=0$ 或 $n=2$ ………………5 分

若 $n=0$，直线 BC 的方程为 $x=my$，恒过定点 $(0,0)$，不合题意舍；

若 $n=2$，直线 BC 的方程为 $x=my+2$，恒过定点 $(2,0)$ ……………………6 分

（2）解析：方法 1：设直线 BC 的方程为 $x=my-\dfrac{1}{2},B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$

$\begin{cases}x=my-\dfrac{1}{2}\\y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2my+1=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\\y_1+y_2=2m\\y_1y_2=1\end{cases}$

$k_{BF}+k_{CF}=\dfrac{y_1}{x_1-\frac{1}{2}}+\dfrac{y_2}{x_2-\frac{1}{2}}=\dfrac{y_1}{my_1-1}+\dfrac{y_2}{my_2-1}=\dfrac{2my_1y_2-(y_1+y_2)}{(my_1-1)(my_2-1)}$ …………8 分

$=\dfrac{2m-2m}{(my_1-1)(my_2-1)}=0$

不妨设直线 BF 的倾斜角为 $\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$，

则 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{24}{7}\ \therefore \tan\alpha=\dfrac{4}{3},k_{BF}=\dfrac{4}{3},k_{CF}=-\dfrac{4}{3}$

$\because k_{BF}=\dfrac{y_1}{x_1-\frac{1}{2}}=\dfrac{y_1}{\frac{y_1^2}{2}-\frac{1}{2}}=\dfrac{2y_1}{y_1^2-1}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow y_1=-\dfrac{1}{2}\ \therefore B(\dfrac{1}{8},-\dfrac{1}{2})$

$\because k_{AF}=\dfrac{4}{3}=k_{BF}\ \therefore A,F,B$ 共线 ……………………10 分

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}=4$． ……………………12 分

方法 2：设直线 BC 的方程为 $x=my-\dfrac{1}{2},B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$

$$\begin{cases} x = my - \frac{1}{2} \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2my + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ y_1 + y_2 = 2m \\ y_1 y_2 = 1 \end{cases}$$

$\because \overrightarrow{FA} = (x_1 - \frac{1}{2}, y_1), \overrightarrow{FB} = (x_2 - \frac{1}{2}, y_2), |BF| = x_1 + \frac{1}{2}, |CF| = x_2 + \frac{1}{2}, \cos\angle BFC = \frac{7}{25}$

$$\therefore \cos < \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB} >= \frac{\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB}}{|\overrightarrow{FB}||\overrightarrow{FB}|} = \frac{(x_1 - \frac{1}{2})(x_2 - \frac{1}{2}) + y_1 y_2}{(x_1 + \frac{1}{2})(x_2 + \frac{1}{2})} = \frac{(my_1 - 1)(my_2 - 1) + y_1 y_2}{(my_1)(my_2)}$$

$$= \frac{(m^2+1)y_1y_2 - m(y_1+y_2) + 1}{m^2 y_1 y_2} = \frac{m^2 + 1 - 2m^2 + 1}{m^2} = \frac{2 - m^2}{m^2} = \frac{7}{25} \Rightarrow m = \pm\frac{5}{4}$$ ……8 分

由于直线 BC 过点 Q，B, C 在 x 轴下方，$\therefore m = -\frac{5}{4}$ …………9 分

代入 $y^2 - 2my + 1 = 0$ 得 $y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = -2 \therefore B(\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})$ …………10 分

$\because k_{AF} = \frac{4}{3} = k_{BF} \therefore A, F, B$ 共线

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}} = 4$$ ……………………12 分

其它方法：①利用面积相等建立等量关系求 m；②利用余弦定理建立等量关系求 m；

22. 解析：（1）因为 $f_n(x)$ 有 2 个零点，所以方程 $\frac{1}{n} = \frac{\ln x}{x}$ 有 2 个根. …………………1 分

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$，

所以 $g(x)$ 在（0, e）上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

因此 $g(x)$ 在 x=e 处取得最大值 $g(e) = \frac{1}{e}$ …………………2 分

所以 $\frac{1}{n} < \frac{1}{e}$，即有 $n > e$，且有 $x_n < e < y_n (n \in N^*)$ ………………3 分

又 $\frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{\ln x_n}{x_n}, \frac{1}{n+1} = \frac{\ln x_{n+1}}{x_{n+1}}$，结合函数 $g(x)$ 单调性可得，$x_{n+1} < x_n, y_{n+1} > y_n$，

所以 $y_n - x_n < y_{n+1} - x_{n+1}$ ………………………5 分

（2）由 $f_n(\beta) - f_n(\alpha) = f_n'(\theta)(\beta - \alpha)$ 得

$$f_n'(\theta) = \frac{f_n(\beta) - f_n(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha - n(\ln\beta - \ln\alpha)}{\beta - \alpha} = 1 - \frac{n(\ln\beta - \ln\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

而 $f_n'(\frac{\alpha+\beta}{2}) = 1 - \frac{2n}{\alpha + \beta}$，所以

$f_n'(\theta)-f_n'(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{-n(\ln\beta-\ln\alpha)}{\beta-\alpha}+\frac{2n}{\alpha+\beta}=\frac{-n}{\beta-\alpha}[\ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}]$. ……………7 分

设$\frac{\beta}{\alpha}=t(t>1)$,则$\ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$. ………………8 分

令$g(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$,则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2[(t+1)-(t-1)]}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$ ………9 分

所以 g(t)在(1,+∞)上单调递增，因此 g(t)>g(1)=0.

故$\ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}>0$ ……………………………10 分

又$0<\alpha<\beta,n>e$,即$\beta-\alpha>0$,所以$\frac{-n}{\beta-\alpha}<0$,从而$f_n'(\theta)-f_n'(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$,

又因为$f_n'(x)=1-\frac{n}{x}$在（0,+∞）上递增，所以$\theta<\frac{\alpha+\beta}{2}$,得证 ……………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。