

机密★启用前

2021 年湖北省高二年级学年期末联考

数 学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。
- 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，向量 $\mathbf{a} = (1, -1, x)$ ， $\mathbf{b} = (-4, 2, 2)$ ，若 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ，则 $x =$

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

2. 已知随机变量 ζ 的分布列如右表所示，则 $E(\zeta) =$

- A. $-\frac{1}{3}$ B. 0
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

ζ	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. 已知圆 $O_1: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ ，圆 $O_2: (x+2)^2 + (y+1)^2 = 16$ ，则这两个圆的位置关系为

- A. 外离 B. 外切 C. 相交 D. 内含

4. 一袋中有大小相同的 3 个红球和 2 个白球，从中不放回地取球 2 次，每次任取一球，在第一次取到红球的条件下，第二次也取到红球的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{9}{25}$

5. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + cx + 2$ 在 $x = 1$ 处取得极值，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为

- A. $2x + y - 2 = 0$ B. $2x - y + 2 = 0$ C. $x - y + 2 = 0$ D. $x + y - 2 = 0$

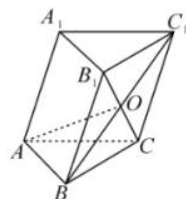
高二数学试卷 第 1 页(共 4 页)

6. 2021 年是“十四五”开局之年,“三农”工作重心转向全面推进乡村振兴.某县现招募了 5 名大学生,其中 3 名男生,2 名女生,计划全部派遣到 A、B、C 三个乡镇参加乡村振兴工作,每个乡镇至少派遣 1 名大学生,乡镇 A 只派 2 名男生.则不同的派遣方法总数为

A. 9 B. 18 C. 36 D. 54

7. 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, BC_1 与 B_1C 相交于点 O, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = \angle BAC = 60^\circ$, $A_1A = 3$, $AB = AC = 2$, 则线段 AO 的长度为

A. $\frac{\sqrt{33}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$
C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{\sqrt{23}}{2}$



8. 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - kx^2 + 3$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1)}{x_2} + \frac{f(x_2)}{x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2}$, 则实数 k 的取值范围是

A. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ B. $(-\infty, \frac{1}{2})$ C. $(-\infty, 2]$ D. $(-\infty, 2)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 下列命题中,正确的命题有

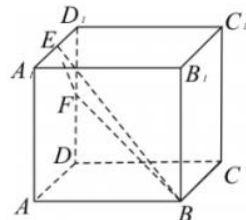
- A. 利用最小二乘法,由样本数据得到的回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$
B. 设随机变量 $X \sim B(20, \frac{1}{2})$, 则 $D(X) = 5$
C. 天气预报,五一假期甲地的降雨概率是 0.3,乙地的降雨概率是 0.2,假定这段时间内两地是否降雨相互没有影响,则这段时间内甲地和乙地都不降雨的概率为 0.5
D. 在线性回归模型中, R^2 表示解释变量对于预报变量变化的贡献率, R^2 越接近于 1,表示回归的效果越好

10. 已知 $(2x - \frac{a}{x})^7$ 的展开式中各项系数的和为 1, 则下列结论正确的有

A. $a = 1$ B. 展开式中二项式系数之和为 256
C. 展开式中系数最大的项为第 3 项 D. 展开式中 x^{-5} 的系数为 -14

11. 如图所示,在棱长为 1 的正方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为棱 A_1D_1 , DD_1 的中点, 则以下四个结论正确的是

- A. $AC_1 \perp$ 平面 BEF
B. $EF \parallel$ 平面 B_1CD_1
C. 异面直线 BE 和 AD 所成的角的正切值为 $2\sqrt{2}$
D. 若 P 为直线 B_1D_1 上的动点, 则三棱锥 E-BFP 的体积为定值



12. 已知抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点为 F , P 为抛物线上一动点, 直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 点 $M(2, 4)$, 则下列说法正确的是
- A. 存在直线 l , 使得 A, B 两点关于 $x + y - 2 = 0$ 对称
- B. $|PM| + |PF|$ 的最小值为 6
- C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切
- D. 若分别以 A, B 为切点的抛物线的两条切线的交点在准线上, 则 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 4

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(X < 4) = 0.9$, 则 $P(0 < X < 2) =$ _____.
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, 且 $a_1, a_2, a_3 + 1$ 成等比数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_9 =$ _____.
15. 已知函数 $y = f(x)$ 在 R 上连续且可导, $y = f(x+1)$ 为偶函数且 $f(2) = 0$, 其导函数满足 $(x-1)f'(x) > 0$, 则函数 $g(x) = (x-1)f(x)$ 的零点个数为 _____.
16. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 $2\sqrt{6}$, P 是该正四面体内切球球面上的动点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最小值为 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知圆 C 经过点 $A(4, -1)$, 且与直线 $x - y + 1 = 0$ 相切于点 $B(-2, -1)$.

- (1) 求圆 C 的方程;
- (2) 设直线 $y = x$ 与圆 C 相交于 M, N 两点, 求弦长 $|MN|$.

18. (12 分)

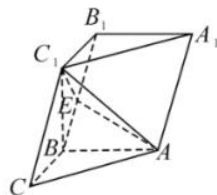
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, $a_1 = 2, a_2 = 4$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{(a_n - 1)(2n + 1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 已知 $AB \perp$ 侧面 BB_1C_1C , $BC = BC_1 = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$, $AB = 3$.

- (1) 求证: $C_1B \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 若 E 是 BB_1 的中点, 求二面角 $A - C_1E - C$ 的余弦值.



20. (12 分)

为庆祝中国共产党成立 100 周年, 某高中决定在全校约 3 000 名高中生中开展“学党史、知奋进”党史知识竞赛活动, 设置一、二、三等奖若干名。为了解学生的获奖情况与选修历史学科之间的关系, 在全校随机选取了 50 名学生作为样本, 统计这 50 名学生的获奖情况后得到如下列联表:

高二数学试卷 第 3 页(共 4 页)

	没有获奖	获奖	合计
选修历史	4		20
没有选修历史		12	
合计			50

- (1) 请完成上面列联表；并判断是否有 99% 的把握认为“党史知识竞赛是否获奖与选修历史学科”有关；（结果保留一位小数）
- (2) ①在上述样本中从选修历史的学生中抽取 4 名学生，设抽到没有获奖的人数为 X ，求 $P(X=3)$ （概率用组合数表示即可）；
- ②若将样本频率视为概率，从全校获奖的学生中随机抽取 14 人，求这些人中选修了历史学科的人数 Y 的数学期望。

下面的临界值表供参考

$P(K^2 \geq K_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（参考公式 $K^2 = \frac{n(ab - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ ）

21. (12 分)

已知双曲线 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ ，椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ ，椭圆 E 的离心率与双曲线 C 的离心率互为倒数。

- (1) 求椭圆 E 的方程；
- (2) 不经过椭圆 E 的焦点的直线 $l: y = kx + m (k < 0, m > 0)$ 与以坐标原点为圆心、 $\sqrt{3}$ 为半径的圆相切，且与椭圆 E 交于 M, N 两点，试判断 $\triangle MF_2N$ 的周长是否为定值，若是，求出定值；若不是，请说明理由。

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x + 2$ 。

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 当 $a > 0$ 时，若存在两个不相等的正数 x_1, x_2 ，满足 $f(x_1) = f(x_2)$ ，求证： $x_1 + x_2 > 2a$ 。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线



微信



自主选拔在线
微信号：zizzsw



自主选拔在线
微信号：zizzsw