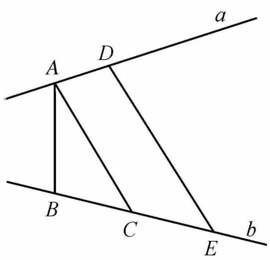
2022～2023学年度高一年级6月月考·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $z=i^3(1-i)=-i(1-i)=-1-i$，所以 $\bar{z}=-1+i$，$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{-1+i}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，则 $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选A.

2. B　因为 $6\times70\%=4.2$，所以该组数据的70%分位数是5. 故选B.

3. D　如图所示，a,b 是异面直线，AB,AC 都与 a,b 相交，AB,AC 相交；AB,DE 都与 a,b 相交，AB,DE 异面，假设 AB,DE 平行，则 AB,DE 确定一平面，不妨设为 α，则 $A,D\in\alpha$，$\therefore a\subset\alpha$；同理 $B,E\in\alpha$，$\therefore b\subset\alpha$，这与 a,b 是异面直线矛盾，故分别和两条异面直线都相交的两条直线的位置关系是异面或相交. 故选D.



4. B　因为命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $ax^2+2x+1<0$ 成立为真命题，当 $a=0$ 时，$2x+1<0$，则 $x<-\frac{1}{2}$，故成立；当 $a>0$ 时，$\Delta=4-4a>0$，解得 $0<a<1$；当 $a<0$ 时，总存在 $ax^2+2x+1<0$. 综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$. 故选B.

5. C　对于A，由 $m\perp l,n\perp l$，在同一个平面可得 $m/\!/n$，在空间不成立，故A错误；对于B，由面面垂直的性质定理知缺少"$l\subset\beta$"，故B错误；对于C，若 $m\perp\alpha,m/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故C正确；对于D，当三个平面 α,β,γ 两两垂直时，结论错误，故D错误. 故选C.

6. A　因为当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=\cos x\leqslant1$，要使 $f(x)$ 有最大值，则 $\begin{cases}3a-1\geqslant0,\\3a-1+a\leqslant1,\end{cases}$ 解得 $a\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$. 故选A.

7. D　将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变得到 $y=\sin 2x$ 的图象，将 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位长度得到 $y=\sin 2(x+\varphi)=\sin(2x+2\varphi)$ 的图象，该图象关于 y 轴对称，所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{4}$. 故选D.

8. C　依题意可得 $\sin^2C=2\sin^2A-3\sin^2B$，由正弦定理得 $c^2=2a^2-3b^2$，$b^2=\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}c^2$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{3}c^2}{2ac}=\frac{\frac{1}{3}a^2+\frac{4}{3}c^2}{2ac}=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2+4c^2}{ac}\geqslant\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{a^2\cdot4c^2}}{ac}=\frac{2}{3}$，当且仅当 $a=2c$ 时等号成立，即 $\cos B$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$. 故选C.

9. BD　对于A中，当从口袋中取出两个黑球时，事件"至少有一个黑球"与"都是黑球"同时发生，所以事件"至少有一个黑球"与"都是黑球"不是互斥事件，所以A不符合题意；
对于B中，从口袋中取出两个球，事件"至少有一个黑球"与"都是红球"不能同时发生，但必有一个事件发生，所以事件"至少有一个黑球"与"都是红球"是对立事件，符合题意；
对于C中，当从口袋中取出一红一黑时，事件"至少有一个黑球"与"至少有一个红球"同时发生，所以事件"至少有一个黑球"与"至少有一个红球"不是互斥事件，所以C不符合题意；
对于D中，事件"恰好有一个黑球"与"恰好有两个黑球"不能同时发生，当取出两个红球时，事件都没有发生，所以事件"恰好有一个黑球"与"恰好有两个黑球"是互斥事件但不是对立事件，符合题意. 故选BD.

10. CD　对选项A，$2\sin15^\circ\cos15^\circ=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，错误；对选项B，$\cos^275^\circ-\sin^275^\circ=\cos150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，错误；对

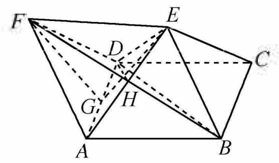
选项 C，$\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sin^2 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=1$，正确；对选项 D，$\sin^2 2\,023+\cos^2 2\,023=1$，正确.故选 CD.

11. BC　对于 A，当 $x<0$ 时，$y=x+\frac{4}{x}=-\left[(-x)+\frac{4}{(-x)}\right]\leqslant -2\sqrt{(-x)\cdot\frac{4}{(-x)}}=-4$，当且仅当 $x=-2$ 时等号成立，无最小值，A 错误；

对于 B，$y=e^x+4e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\times(4e^{-x})}=4$，当且仅当 $e^x=2$ 时等号成立，所以 $y=e^x+4e^{-x}$ 的最小值为 4，B 正确；

对于 C，当 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x\leqslant 1$，$y=4\sin x+\frac{1}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{4\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}}=4$，令 $4\sin x=\frac{1}{\sin x}$，可得 $\sin x=\frac{1}{2}\in(0,1]$，所以 $y=4\sin x+\frac{1}{\sin x}(0<x<\pi)$ 的最小值是 4，C 正确；

对于 D，$y=\frac{2(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}=2\sqrt{x^2+3}\geqslant 2\sqrt{3}$，当 $x=0$ 时等号成立，所以 $y=\frac{2(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$，D 错误.故选 BC.



12. ACD　对于 A，取 AD 的中点 G，连接 EG，FG，则 $AD\perp EG$，$AD\perp FG$，又 EG，$FG\subset$ 平面 EFG，$EG\cap FG=G$，所以 $AD\perp$ 平面 EFG，因为 $EF\subset$ 平面 EFG，所以 $AD\perp EF$，又 $AD/\!/BC$，所以 $EF\perp BC$，故 A 正确；对于 B，设内切球半径为 r，易求得四棱锥 $E-ABCD$ 的一个侧面的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以 $\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{1}{3}a^2\cdot r+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r$，解得 $r=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})a}{4}$，故 B 错误；对于 C，取 AE 的中点 H，连接 DH，FH，BH，DB，易知 $AE\perp FH$，$AE\perp DH$，$AE\perp BH$，所以 $\angle DHF$，$\angle DHB$ 分别是二面角 $D-AE-F$，二面角 $D-AE-B$ 的平面角，易求得 $DH=FH=BH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $\cos\angle DHF=\frac{DH^2+FH^2-DF^2}{2DH\cdot FH}=\frac{1}{3}$，$\cos\angle DHB=\frac{DH^2+BH^2-DB^2}{2DH\cdot BH}=-\frac{1}{3}$，又 $\angle DHF$，$\angle DHB\in[0,\pi]$，所以 $\angle DHF$ 与 $\angle DHB$ 互补，所以 E，F，A，B 共面，故 C 正确；因为 E，F，A，B 共面，又 $EF=AB=AF=BE$，所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形，所以 $AF/\!/BE$，$BE\subset$ 平面 BEC，$AF\not\subset$ 平面 BEC，所以 $AF/\!/$ 平面 BEC，同理 $AD/\!/$ 平面 BEC，又 AD，$AF\subset$ 平面 ADF，$AD\cap AF=A$，所以平面 $FAD/\!/$ 平面 BEC，故 D 正确.故选 ACD.

13. 1　$\left(\frac{27}{8}\right)^{\sin 0}+\log_2\cos 0=\left(\frac{27}{8}\right)^0+\log_2 1=1$.

14. 60　由题意可知，所有学生的平均身高为：$\frac{24\times170+16\times160}{40}=166$，则该班学生身高的方差为 $\frac{24}{40}\times[28+(170-166)^2]+\frac{16}{40}\times[48+(160-166)^2]=60$.

15. $\frac{1}{5}$　由于 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}$，因此 $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$，从而 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，由平面向量基本定理可得 $m=\frac{3}{5}$，$n=\frac{2}{5}$，则 $m-n=\frac{1}{5}$.

16. $6\sqrt{3}\pi$　因为该正方体可以任意转动，则该正方体的外接球恰为圆柱的内切球时该容器的容积最小.由正方体的棱长为 2，可得其外接球的半径 $R=\sqrt{3}$，此时圆柱的底面半径为 $\sqrt{3}$，高为 $2\sqrt{3}$，容积 $V=\pi\cdot(\sqrt{3})^2\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\pi$.

17. 解：(1) 由题意 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$，

由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$,得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=2$,

解得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. ………………………………………………………………………… 5分

(2)$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{5}\boldsymbol{b}=\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$. …………………… 10分

18. 解:(1)甲、乙、丙都中一等奖的概率为$0.1\times0.1\times0.1=0.001$; ………………………… 4分

(2)甲未中奖且乙、丙中奖的概率为$0.4\times(1-0.4)\times(1-0.4)=0.144$; ……………………… 8分

(3)甲、乙、丙至少有一人中奖的概率为$1-0.4\times0.4\times0.4=0.936$. …………………………… 12分

19. 解:(1)$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi=\sin(\omega x+\varphi)$. ………………………… 2分

由题设,$f(x)$的最小正周期$T=\pi$,故$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. ………………………………………… 3分

又$\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}$,

结合$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$,可得$f\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}}{2}\right)=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=0$. ………………………………… 5分

所以$\frac{5\pi}{12}\times2+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,$\varphi=-\frac{5\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………………………… 8分

故$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ………………………………………………………………………… 9分

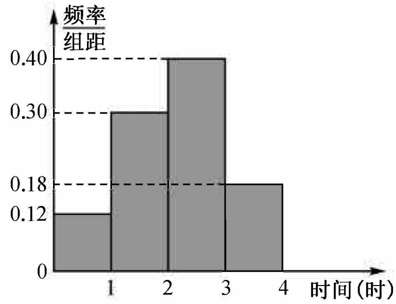
(2)由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 11分

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. ……………………………………… 12分

20. 解:(1)由题意$\frac{12}{m}=0.12\Rightarrow m=100$,

故$x=0.4m=40$,$y=\frac{18}{m}=0.18$, ………………………………………………………………… 2分

频率分布直方图如图所示:



……………………………………………………………………………………………………… 3分

(2)平均劳动时间$\bar{t}=\frac{12\times0.5+30\times1.5+40\times2.5+18\times3.5}{100}=\frac{214}{100}=2.14$(时). …………………… 6分

(3)由题意,劳动时间在$[0,1)$应抽取的人数为$5\times\frac{0.12}{0.12+0.18}=2$(人),分别记为$A,B$;

劳动时间在$[3,4]$应抽取的人数为$5\times\frac{0.18}{0.12+0.18}=3$(人),分别记为$a,b,c$. ……………………… 8分

则该试验的样本空间$\Omega=\{(A,B),(A,a),(A,b),(A,c),(B,a),(B,b),(B,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$,

$n(\Omega)=10$. …………………………………………………………………… 10分

设事件 M="抽取的2人均来自[3,4]",

则 $M=\{(a,b),(a,c),(b,c)\}$,$n(M)=3$, …………………………………… 11分

所以 $P(M)=\frac{3}{10}$,故所求概率为 $\frac{3}{10}$. ……………………………………… 12分

21.(1)证明:因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AB/\!/CD$. ……………………………… 1分

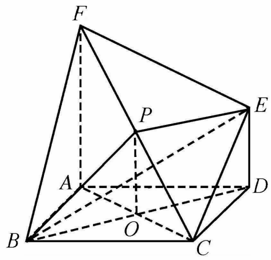
又 $AB\subset$ 平面 ABF,$CD\not\subset$ 平面 ABF,所以 $CD/\!/$ 平面 ABF. ……………………… 2分

因为 $ED/\!/FA$,$AF\subset$ 平面 ABF,$DE\not\subset$ 平面 ABF,所以 $DE/\!/$ 平面 ABF. ……………… 4分

而 $CD\cap DE=D$,$CD,ED\subset$ 平面 CDE,所以平面 $ABF/\!/$ 平面 CDE. ……………… 5分

(2)解:棱 CF 上存在点 P,使平面 $FAC\perp$ 平面 PBE,且 P 为棱 CF 的中点.理由如下:……… 6分

连接 AC,BD 交于点 O,设 FC 的中点为 P,连接 OP,EP. ………………………… 7分



如图,在菱形 $ABCD$ 中,O 为 AC 的中点,则 $OP/\!/FA$,且 $OP=\frac{1}{2}FA$,而 $FA=2ED$,$ED/\!/FA$,

于是得 $OP/\!/ED$,且 $OP=ED$,即四边形 $OPED$ 为平行四边形. …………… 9分

所以 $OD/\!/EP$,即 $BD/\!/EP$,

因为 $FA\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,则 $FA\perp BD$,又 $BD/\!/EP$,所以 $FA\perp EP$.

又四边形 $ABCD$ 是菱形,即 $BD\perp AC$,所以 $EP\perp AC$,

而 $FA\cap AC=A$,$FA,AC\subset$ 平面 FAC,因此 $EP\perp$ 平面 FAC,又 $EP\subset$ 平面 PBE,

所以平面 $FAC\perp$ 平面 PBE. ……………………………………………………… 12分

22.解:(1)在△ABC 中,由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$, ……………………………… 1分

所以 $\sin\angle ACB=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=1$. ……………………………………… 2分

又 $\angle ACB\in(0,\pi)$,所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, ……………………………………………… 3分

则 $\angle BAC=\pi-\angle ACB-B=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………… 4分

(2)因为 A,B,C,D 四点共圆,

所以 $D+B=\pi$,$D=\pi-B=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6分

在△ACD 中,由余弦定理,得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\times\cos D$,

所以 $3=AD^2+CD^2+AD\times CD\geqslant 3AD\times CD$,

$AD\times CD\leqslant 1$,当且仅当 $AD=CD=1$ 时取等号. ………………………………… 10分

所以△ACD 的面积 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AD\times CD\times\sin D\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$. ……………………………… 11分

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。