大庆铁人中学 2020-2021 学年高二学年下学期期末考试

文科数学试题

试题说明：

1、本试题满分 150 分，答题时间 120 分钟。

2、请将答案填写在答题卡上，考试结束后只交答题卡。

第 I 卷　选择题部分

一、选择题（每小题只有一个选项正确，每小题 5 分，共 60 分。）

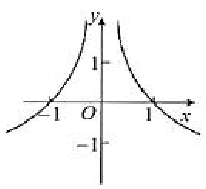
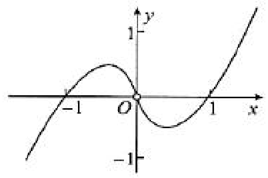
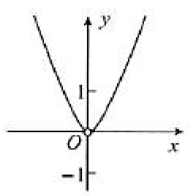
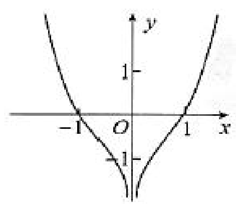
1. 已知集合 $A=\{m,n\}$，集合 B 满足 $A\bigcup B=\{m,n\}$，则集合 B 有（　）个

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

2. 已知集合 $A=\{y|y=\log_2 x, x>1\}$，$B=\{y|y=2^{-x}, x>1\}$，则 $A\bigcap B=$（　）

A. $\varnothing$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

3. 函数 $f(x)=(3^x+3^{-x})\ln|x|$ 的图象大致为（　）

A. 
B. 
C. 
D. 

4. 函数 $f(x)=x^3-12x$ 的极大值点为（　）

A. 2　　B. 16　　C. -2　　D. -16

5. 设函数 $f(x)=\log_3 x-1$ 的图象与 x 轴相交于点 P，则该函数在 P 点处切线的斜率为（　）

A. $3\log_3 e$　　B. $3\ln 3$　　C. $\frac{1}{3}\log_3 e$　　D. $\frac{1}{3}\ln 3$

6. 下列说法中正确的个数有（　）

① “$f(0)=0$”是“函数 $f(x)$ 是奇函数”的必要不充分条件

② 若 p：$\exists x_0\in R, x_0^2-x_0+1<0$，则 $\neg p$：$\forall x\in R, x^2-x+1\geq 0$

③ 整数 1 到 20 中共有 8 个素数

④ “若 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$”的否命题是“若 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin\alpha\neq\frac{1}{2}$”

A.1 个　　B.2 个　　C.3 个　　D.4 个

7. 已知命题 p：对 $\forall x_1, x_2\in R(x_1\neq x_2)$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；命题 q：$\sqrt[n]{a^n}=|a|,(n\in N_+, n>1)$，则下列命题为真命题的是（　）

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$　　C. $(\neg p)\wedge q$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}-x+1, x\leq 0\\ -x^2-1, x>0\end{cases}$，$a=0.7^{-0.5}, b=\log_{0.5}0.7, c=\log_{0.7}5$，则（　）

A. $f(a)>f(b)>f(c)$　　B. $f(b)>f(a)>f(c)$

C. $f(c)>f(a)>f(b)$　　D. $f(c)>f(b)>f(a)$

9. 丹麦数学家琴生 $(Jensen)$ 是 19 世纪对数学分析做出卓越贡献的数学家，特别是在函数的凹凸性与不等式方面留下了很多宝贵的成果. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f'(x)$，$f'(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f''(x)$，若在 (a,b) 上 $f''(x)<0$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为“凸函数”。已知 $f(x)=e^x-x\ln x-\frac{m}{2}x^2$ 在 $(1,4)$ 上为“凸函数”，则实数 m 的取值范围是（　）

A. $(e-1,+\infty)$　　B. $[e-1,+\infty)$　　C. $\left[e^4-\frac{1}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(e^4-\frac{1}{4},+\infty\right)$

10. 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-ax-5)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围（　）

A. $(-\infty,-4]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[-4,+\infty)$

11. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f'(x)<f(x)$，且 $f(x+3)$ 为偶函数，

$f(6)=1$，则不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为(　　)

A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,6)$　　D. $(6,+\infty)$

12. 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{1}{f(x-1)+1}$，当 $x\in(-1,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x+1}-1$，若函数 $g(x)=\left|f(x)-\dfrac{1}{2}\right|-mx-m$ 在 $(-1,1)$ 内恰有 3 个零点，则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{16})$　　B. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{16}\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$

第 II 卷　非选择题部分

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13.若命题“$\exists x\in R,x^2+(a-1)x+1<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围为_____

14.设函数 $f(x)=x+g(x)$ 在R上可导，且 $f(x)$ 在图象上的点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=x+4$，则 $g(2)+g'(2)$ 的值为______

15.将一个边长为 a 的正方形铁片的四角截去四个边长相等的小正方形，做成一个无盖方盒,若该方盒的体积为 2，则 a 的最小值为_____

16.对于函数 $f(x)$，把满足 $f(x_0)=x_0$ 的实数 x_0 叫做函数 $f(x)$ 的不动点，设 $f(x)=2a\ln x$，若 $f(x)$ 有两个不动点，则实数 a 的取值范围是_____

三、解答题（共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题 10 分）已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x||x+a|<1\}$.

(1)若 $a=3$，求 $A\cup B$；

(2)设 p：$x\in A$，q：$x\in B$，若 p 是 q 成立的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x(1+x)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求关于 m 的不等式 $f(1-m)+f(1-m^2)<0$ 的解集.

19.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$，$g(x)=2^x+a$.

（1）求函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上的值域；

（2）若 $\forall x_1\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使得 $f(x_1)\ge g(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

20.（本小题 12 分）设函数 $f(x)=\ln x+x^2-2ax+a^2,a\in R$，

（1）当 $a=\sqrt{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上存在单调递增区间，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1$

（1）当 $a=6$ 时，直线 $y=-6x+m$ 与函数 $f(x)$ 的图象相切，求实数 m 的值；

（2）当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的和为1，求实数 a 的值.

22.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)=(x-1)^2+m\ln x,m\in R$

（1）当 $m=2$ 时，求函数 $f(x)$ 图象在点 $(1,0)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$ 求 $\dfrac{f(x_2)}{x_1}$ 的取值范围.

1-12 DDDCC BBDCA AC

13. $[-1,3]$ 14.4 15.3 16. $(e,+\infty)$

17. 【答案】解：$(1)\because x^2+2x-3<0$，$\therefore (x+3)(x-1)<0$，解得$-3<x<1$，

$\therefore A=(-3,1)$，$\because$当$a=3$时，$|x+3|<1$，$\therefore -1<x+3<1$，$\therefore -4<x<-2$，

$\therefore B=(-4,-2)$，$\therefore A\cup B=(-4,1)$.

(2)由(1)可知，$A=(-3,1)$，$\because |x+a|<1$，$\therefore -1<x+a<1$，$\therefore -1-a<x<1-a$，

$\therefore B=(-1-a,1-a)$，$\because p$：$x\in A$，q：$x\in B$，p 是 q 成立的必要不充分条件，

$\therefore B\subsetneqq A$，$\therefore \begin{cases}-1-a\geq -3\\ 1-a\leq 1\end{cases}$，解得$0\leq a\leq 2$.

18. 【答案】解：(Ⅰ) $\because$函数$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，…(1分) $\therefore$当$x=0$时，$f(x)=0$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)=-f(-x)=(-x)(1-x)=x(x-1)$.…(4分)

$\therefore f(x)=\begin{cases}x(x-1),x\leq 0\\ -x(x+1),x>0\end{cases}$ …(5分)

(Ⅱ) $\because$函数$f(x)$为奇函数，$\therefore f(1-m)+f(1-m^2)<0\Leftrightarrow f(1-m^2)<-f(1-m)=f(m-1)$，…(8分)

易知$f(x)$在 R 单调递减，…(9分) $\therefore 1-m^2>m-1$，解得：$-2<m<1$

故不等式的解集是$\{x|-2<m<1\}$.…(12分)

19. 解：$(1)\forall x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{4}{x_1}-(x_2+\frac{4}{x_2})=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$，

$\frac{1}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant 1\Rightarrow x_1-x_2<0,0<x_1x_2<1<4$

$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$，

所以$f(x)$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，$f(\frac{1}{2})=\frac{17}{2}$，$f(1)=5$，

所以函数$f(x)=x+\frac{4}{x}$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上的值域为$[5,\frac{17}{2}]$.

(2)因为$\forall x_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$\exists x_2\in[2,3]$，使得$f(x_1)\geq g(x_2)$，所以$f(x_1)_{\min}\geq g(x_2)_{\min}$，

因为$x_2\in[2,3]$，所以$g(x_2)\geq 2^2+a=4+a$，所以$5\geq 4+a$，即$a\leq 1$.

20.（1）当 $a=\sqrt{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{(\sqrt{2}x-1)^2}{x}\geq 0$ 恒成立，$f(x)$ 的单调递增区间为$(0,+\infty)$；无减区间

（2）$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-2a=\frac{2x^2-2ax+1}{x}$，设$g(x)=2x^2-2ax+1$，

由题意，在区间$[\frac{1}{2},2]$上存在子区间使得不等式$g(x)>0$成立，

$\because 2>0$，$\therefore$只要$g(2)>0$或$g(\frac{1}{2})>0$即可.

由$g(2)>0$，即$8-4a+1>0$，解得$a<\frac{9}{4}$；由$g(\frac{1}{2})>0$，即$\frac{1}{2}-a+1>0$，解得$a<\frac{3}{2}$.

综上可得：

$a<\frac{9}{4}$.

(1) 当$a=6$时，$f(x)=2x^3-6x^2+1$，则$f'(x)=6x^2-12x$，

由$f'(x)=6x^2-12x=-6$，得$x=1$，

又$f(1)=-3$，代入切线方程得$-3=-6\times1+m$，所以$m=3$

21.【答案】(2)因为$f(x)=2x^3-ax^2+1(a>0)$，

所以由$f'(x)=6x^2-2ax=6x\left(x-\frac{a}{3}\right)=0$，得$x_1=0$，$x_2=\frac{a}{3}$

因为$a>0$，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{a}{3}\right)$	$\frac{a}{3}$	$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

并且$f(-1)=-1-a$，$f(1)=3-a$，$f(0)=1$，$f\left(\frac{a}{3}\right)=1-\frac{a^3}{27}$

①当$\frac{a}{3}\geq1$，即$a\geq3$时，$f(x)$在$(-1,0)$上递增，在$(0,1)$上递减，

$f(x)_{\max}=f(0)=1$，又$f(-1)<f(1)$，所以$f(x)_{\min}=f(-1)=-1-a$

由已知$1+(-1-a)=1$，所以$a=-1<0$，不合题意

②当$0<\frac{a}{3}<1$，即$0<a<3$时，$f(x)$在$(-1,0)$上递增，在$\left(0,\frac{e}{3}\right)$上递减，在$(0,1)$上递增，

所以$f(x)_{\min}$是$f(-1)$和$f\left(\frac{a}{3}\right)$中较小者，而$f(-1)<0$，$f\left(\frac{a}{3}\right)=1-\frac{a^3}{27}>0$，所以$f(x)_{\min}=-a-1$，

$f(x)_{\max}$是$f(0)$和$f(1)$中的较大者，

1° 当$0<a<2$时，$f(0)-f(1)=a-2<0$，所以$f(x)_{\max}=f(1)=3-a$

由已知$3-a-a-1=1$，所以$a=\frac{1}{2}$

2° 当$2<a<3$时,$f(x)_{\max}=f(0)=1$

由已知$1-a-1=1$，所以$a=-1\notin(2,3)$，舍去

故，$a=\frac{1}{2}$

22.【答案】解：(Ⅰ)当$m=2$时，$f(x)=(x-1)^2+2\ln x$，

则

$f'(x)=2(x-1)+\frac{2}{x}$，

则$f'(1)=2$，即切线斜率为 2，

又切点为$(1,0)$，

故切线方程为$y=2(x-1)$，即$2x-y-2=0$.

(Ⅱ)函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=2(x-1)+\frac{m}{x}=\frac{2x^2-2x+m}{x}$,

$\because x_1,x_2$是函数的两个极值点，

$\therefore x_1,x_2$是方程$2x^2-2x+m=0$的两个不等实根，

$\therefore \begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=\frac{m}{2}\end{cases}(*)$,

$\because x_1<x_2$,

$\therefore 0<x_1<\frac{1}{2}<x_2<1$，$\frac{f(x_2)}{x_1}=\frac{(x_2-1)^2+m\ln x_2}{x_1}$，

将$(*)$式代入得：$\frac{f(x_2)}{x_1}=\frac{(x_2-1)^2+2x_2(1-x_2)\ln x_2}{1-x_2}=1-x_2+2x_2\ln x_2$，

设$g(t)=1-t+2t\ln t,t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

则$g'(t)=2\ln t+1$，令$g'(t)=0$，解得$t=\frac{1}{\sqrt{e}}$，

当$t\in\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$时，$g'(t)<0$，则$g(t)$在$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递减，

当$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{e}},1\right)$时，$g'(t)>0$，则$g(t)$在$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},1\right)$上单调递增，

$\therefore g(t)_{min}=g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{e}}=1-\frac{2\sqrt{e}}{e}$,

$\therefore g(t)<max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right),g(1)\right\}$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2<0=g(1)$，

即$\frac{f(x_2)}{x_1}$的取值范围$[1-\frac{2\sqrt{e}}{e},0)$.

【解析】本题主要考查导数的几何意义，利用导数研究函数的单调性、极值以及最值，属于难题.

(Ⅰ)对函数求导，将$x=1$代入到导函数求得切线斜率，结合切点即可求出切线的点斜式.

(Ⅱ)根据题意可知x_1,x_2是方程$2x^2-2x+m=0$的两个不等实根，则$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=\frac{m}{2}\end{cases}(*)$，则可求得$\frac{f(x_2)}{x_1}=1-x_2+2x_2\ln x_2$，设$g(t)=1-t+2t\ln t,t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，利用导数研究其单调性，求得$g(t)_{min}=g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{e}}=1-\frac{2\sqrt{e}}{e}$，故$g(t)<max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right),g(1)\right\}$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln 2<0=g(1)$，即可求解.