

合肥一中 2023 届高三最后一卷

数学试题

(考试时间: 120 分钟满分: 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位.
2. 答题时, 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
3. 答题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写, 要求字体工整、笔迹清晰. 作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出, 确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚. 必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效.
4. 考试结束, 务必将答题卡和答题卷一并上交.

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \cdot 1\}$, $B = \{y \mid y = -x^2, -\sqrt{2} \cdot x < 1\}$, 则 $\partial_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (\quad)$

A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ D. \mathbb{R}

2. 若复数 z 满足 $z(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = -1 + \sqrt{3}i$, 则 z 的共复数的虚部是 (\quad)

A. $-\sqrt{3}$ B. $-\sqrt{3}i$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}i$

3. 2017 年国家提出乡村振兴战略目标: 2020 年取得重要进展, 制度框架和政策体系基本形成; 2035 年取得决定性进展, 农业农村现代化基本实现; 2050 年乡村全面振兴, 农业强、农村美、农民富全面实现. 全面推进乡村振兴是继脱贫攻坚取得全面胜利后三农工作重心历史性转移重要时刻. 某地为实现乡村振兴, 对某农产品加工企业调研得到该企业 2014 年到 2022 年盈利情况如下表.

年份	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
盈利 y (百万)	6.0	6.1	6.2	6.0	■	6.9	6.8	7.1	7.0

已知由 9 组数据利用最小二乘法求得的 y 与 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 0.15\hat{x} + 5.75$, 现由于工作失误, 第五组数据被污损, 则被污损的数据为 (\quad)

A. 6.3 B. 6.4 C. 6.5 D. 6.6

4. 已知曲线 $C_1: y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$, $C_2: y = -\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 3x\right)$, 则下面结论正确的是 (\quad)

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线

C_2

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度, 得到曲

线 C_2

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线

C_2

5. 设 O 为坐标原点, F 为抛物线 $C: x^2=2py (p>0)$ 的焦点, 直线 $y=1$ 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 若 $\angle AFB=120^\circ$, 则抛物线 C 的准线方程为 ()

A. $y=-\frac{2}{3}$ B. $y=-3$ C. $y=-\frac{1}{3}$ 或 $y=-3$ D. $y=-\frac{2}{3}$ 或 $y=-6$

6. 已知 A, B, C 是三个随机事件, “ A, B, C 两两独立”是 “ $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ ” 的 () 条件

A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充要 D. 既不充分也不必要

7. 过原点的直线 l 与曲线 $y=\frac{1}{x}$ 交于 A, B 两点, 现以 x 轴为折痕将上下两个半平面折成 60° 的二面角, 则 $|AB|$

的最小值为 ()

A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. 12

8. 已知函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 R , $f(x+1)$ 为偶函数, 且 $f(3-x)+g(x)=1$, $f(x)-g(1-x)=1$, 则下面判断错误的是 ()

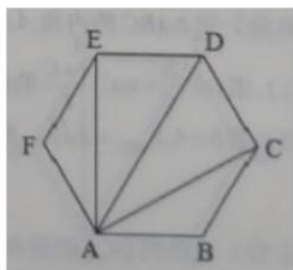
A. $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 中心对称
B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期为 4 的周期函数

C. $\sum_{i=1}^{2022} f(i) = 2022$

D. $\sum_{i=0}^{2023} g(i) = 0$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 如图, 已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1, 记 $\overrightarrow{BC} = \vec{e}$, 则 ()



- A. $\overline{AD} = 2(\overline{AF} + \overline{DE})$ B. $\overline{AB} \cdot (\overline{EA} + 2\overline{FA}) = |\overline{AB}|^2$
 C. $\overline{BC}(\overline{CD} \cdot \overline{FE}) = (\overline{BC} \cdot \overline{CD})\overline{FE}$ D. \overline{AE} 在 \overline{CB} 方向上的投影向量为 $-\frac{3}{2}\vec{e}$

10. 已知半径为 R 的球与圆台的上下底面和侧面都相切. 若圆台上下底面半径分别为 r_1 和 r_2 , 母线长为 l , 球的表面积与体积分别为 S_1 和 V_1 , 圆台的表面积与体积分别为 S_2 和 V_2 . 则下列说法正确的是 ()

- A. $l = r_1 + r_2$ B. $R = \sqrt{r_1 r_2}$
 C. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_1}{V_2}$ D. $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$

11. 已知正三角形 ABC 的边长为 2, 点 D 为边 BC 的中点. 若 $\triangle ABC$ 内一动点 M 满足 $MA^2 + 3MD^2 = 3$. 则下列说法中正确的有 ()

- A. 线段 BM 长度的最大为 $\frac{\sqrt{19}}{4}$ B. $\overline{MB} \cdot \overline{MC}$ 的最大值为 $-\frac{1}{4}$
 C. $\triangle ABM$ 面积的最小值为 $\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ D. $\cos \angle MBC$ 的最小值为 $\frac{13}{19}$

12. 若函数 $f(x) = 2\sin^2 x \cdot \log_2 \sin x + 2\cos^2 x \cdot \log_2 \cos x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
 C. $f(x)$ 的最小值为 -1
 D. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 曲线 $y = \frac{1+x}{1-x}$ 在点 (2, -3) 处的切线方程为 _____

14. 已知 α, β 都是锐角, $\tan(\alpha + \beta) = -1$, 则 $\frac{\cos(\beta - \alpha) - \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} =$ _____.

15. 定义: 公比为 q ($0 < |q| < 1$) 的无穷等比数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为 $\frac{a_1}{1-q}$, 即当 n 趋向于无穷大时, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

趋向于 $\frac{a_1}{1-q}$. 利用此定义可将无限循环小数化成分数形式 $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, 且 $b \neq 0$, a, b 互质), 则 $5.\dot{2}\dot{5}$ 的分数形式为_____

16. 设点 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{3-m} = 1$ 的左焦点, 经过原点 O 且斜率 $k \neq \sqrt{3}$ 的直线与双曲线 C 交于 A, B 两

点, AF 的中点为 P , BF 的中点为 Q . 若 $OP \perp OQ$, 则双曲线 C 的离心率 e 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos B = \frac{1}{3}$

(1) 求 $\cos^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{A+C}{2}$ 的值:

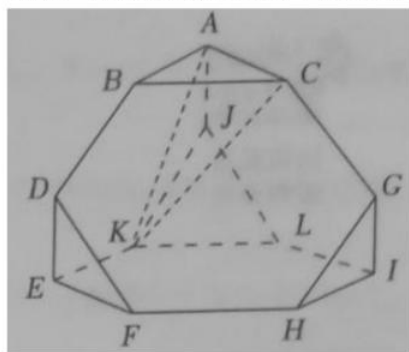
(2) 若 $b=4, S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$, 求 C 的值.

18. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{n+2} + 3S_n = 4S_{n+1} - 2a_n$, $a_1=1, a_2=3$

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等差数列;

(2) 记 $(a_n + 1)b_n = \frac{n+2}{n^2+n}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求 T_n .

19. (12 分) 截角四面体是一种半正八面体, 可由四面体经过适当的截角, 即截去四面体的四个顶点处的小棱锥所得的多面体. 现将棱长为 3 的正四面体沿棱的三等分点分别作平行于各底面的截面, 截去四个顶点处的小棱锥, 得到所有棱长均为 1 的截角四面体, 如图所示.



(1) 求证: $BD \perp EF$;

(2) 求直线 BD 与平面 ACK 所成角的正弦值.

20. (12 分) 2023 年 4 月 23 日, 是中国海军成立 74 周年 74 年向海图强, 74 年劈波斩浪. 74 年, 人民海军新装备不断增加, 新型作战力量加速发展, 从“101 南昌舰”到“108 咸阳舰”, 8 艘 055 型驱逐舰列阵. 我国自主研发

的 075 型两栖攻击舰“31 海南舰”“32 广西舰”“33 安徽舰”也相继正式入列.从小艇到大舰,从近海防御到挺进深蓝大洋,人民海军步履铿锵,捍卫国家主权,维护世界和平.为了庆祝中国海军成立 74 周年,某公司设计生产了三款两栖攻击舰模型(分别为“31 海南舰”、“32 广西舰”“33 安徽舰”),并限量发行若该公司每个月发行 300 件(三款各 100 件),一共持续 12 个月,采用摇号的方式进行销售.假设每个月都有 3000 人参与摇号,摇上号的将等可能获得三款中的一款.小周是个“战舰狂热粉”,听到该公司发行两栖攻击舰模型,欣喜若狂.

(1) 若小周连续三个月参与摇号,求他在这三个月集齐三款模型的概率;

(2) 若摇上号的人不再参加后面的摇号.已知小周从第一个月开始参与摇号,并且在 12 个月的限量发行中成功摇到并获得了模型.设他第 X 个月 ($X=1, 2, \dots, 12$) 摇到并获得了模型,求 X 的数学期望.

21. (12 分) 已知点 $M(1,1)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ 上一点, 直线 $l: x+ty-1=0 (t \in R)$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(1) 当 $t=1$ 时, 求 $\triangle ABM$ 的面积;

(2) 设直线 AM 和 BM 分别与直线 $x=4$ 交于点 P, Q , 若 $\triangle ABM$ 与 $\triangle PQM$ 的面积满足 $S_{\triangle PQM} = 5S_{\triangle ABM}$, 求实数 t 的值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - x + 1$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$

(1) 求 $f(x_1)$ 的取值范围;

(2) 若 $2x_1 < x_2$, 证明: $8x_1 < x_2^2$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

