海淀区 2020 ～ 2021 学年第二学期期末练习

高三数学

2021.05

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）在平面直角坐标系 xOy 中，角 θ 以 Ox 为始边，终边经过点 $(-3,4)$，则 $\cos\theta=$

（A）$\frac{4}{5}$　　（B）$\frac{3}{5}$　　（C）$-\frac{3}{5}$　　（D）$-\frac{4}{5}$

（2）设 $a\in\mathbf{R}$. 若 $(2+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})=-1-3\mathrm{i}$，则 $a=$

（A）-1　　（B）-2　　（C）1　　（D）2

（3）已知 $a=0.3^{1.5}$，$b=\log_{1.5}0.3$，$c=1.5^{0.3}$，则

（A）$a<b<c$　　（B）$b<a<c$

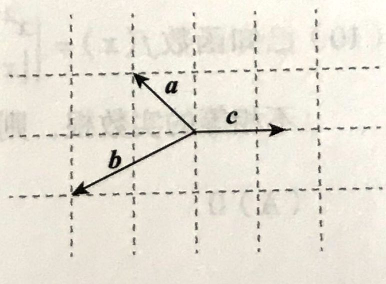
（C）$a<c<b$　　（D）$b<c<a$

（4）已知 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，$P(x_0,y_0)$ 是该抛物线上的一点. 若 $|PF|>2$，则

（A）$x_0\in(0,1)$　　（B）$x_0\in(1,+\infty)$

（C）$y_0\in(2,+\infty)$　　（D）$y_0\in(-\infty,2)$

（5）向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在边长为1的正方形网格中的位置如图所示. 若 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{c}$ 同方向的单位向量，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}=$



（A）1.5

（B）2

（C）-4.5

（D）-3

（6）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$，则 x 的最大值是

（A）3　　（B）2　　（C）-1　　（D）-3

（7）已知指数函数 $f(x)=a^x$，将函数 $f(x)$ 的图象上的每个点的横坐标不变，纵坐标扩大为原来的 3 倍，得到函数 $g(x)$ 的图象，再将 $g(x)$ 的图象向右平移 2 个单位长度，所得图象恰好与函数 $f(x)$ 的图象重合，则 a 的值是

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

（8）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图 1），点 P 在侧面 CDD_1C_1 内（包括边界）．若三棱锥 B_1-ABP 的俯视图为等腰直角三角形（如图 2），则此三棱锥的左视图不可能是

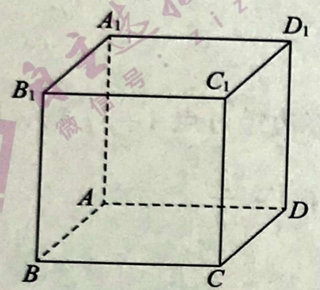
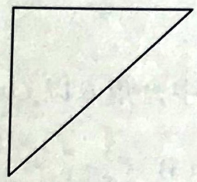
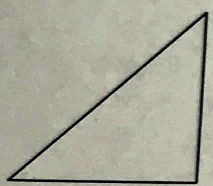


图1

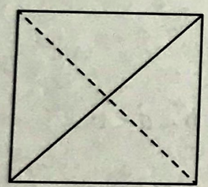


俯视图

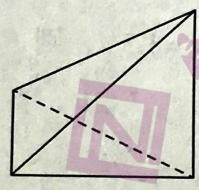
图2



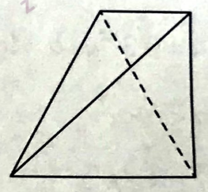
（A）



（B）



（C）



（D）

（9）已知实数 α，β．“$\alpha+\beta=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$”是“$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2, & x\geqslant a,\\ |x+a|, & x<a.\end{cases}$ 若对于任意正数 k，关于 x 的方程 $f(x)=k$ 都恰有两个不相等的实数根，则满足条件的实数 a 的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）无数

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}-2a_n=0$（$n=1, 2, \cdots$），则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为________.

（12）已知 $(1+2x)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 16，则 $n=$________；各项系数之和为________.（用数字作答）

（13）在△ABC 中，$a=3$，$b=7$，$\angle B=\dfrac{2\pi}{3}$，则△ABC 的面积为________.

（14）已知双曲线 M: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 F_1，A，B 为双曲线 M 上的两点，O 为坐标原点．若四边形 F_1ABO 为菱形，则双曲线 M 的离心率为________.

（15）普林斯顿大学的康威教授于 1986 年发现了一类有趣的数列并命名为“外观数列”（Look and say sequence），该数列的后一项由前一项的外观产生．以 i（$i\in\mathbf{N}$, $0\leqslant i\leqslant 9$）为首项的“外观数列”记作 A_i，其中 A_1 为 1，11，21，1211，111221，…，即第一项为 1，外观上看是 1 个 1，因此第二项为 11；第二项外观上看是 2 个 1，因此第三项为 21；第三项外观上看是 1 个 2，1 个 1，因此第四项为 1211，…．按照相同的规则可得其它 A_i，例如 A_3 为 3，13，1113，3113，132113，…．给出下列四个结论：

①若 A_i 的第 n 项记作 a_n，A_j 的第 n 项记作 b_n，其中 $2\leqslant i<j\leqslant 9$，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n-b_n=i-j$；

② A_1 中存在一项，该项中某连续三个位置上均为数字 3；

③ A_1 的每一项中均不含数字 4；

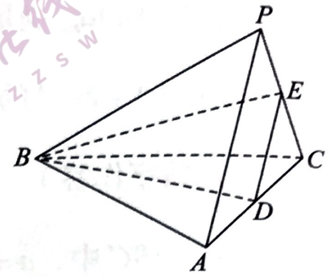
④对于 $k\geqslant 2$，$i\neq 1$，A_i 的第 k 项的首位数字与 A_1 的第 $k+2$ 项的首位数字相同.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题共 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$BC\perp AC$，$BC\perp PC$，$AC=BC=6$，$PA=PC=5$，D，E 分别是 AC，PC 的中点 .

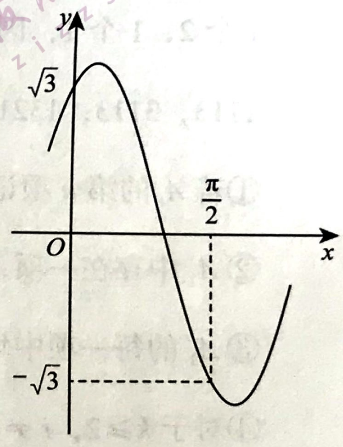


（Ⅰ）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $A-DE-B$ 的余弦值 .

（17）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示 .



（Ⅰ）直接写出 ω 的值；

（Ⅱ）再从条件①、条件②中选择一个作为已知，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$ 上的最小值 .

条件①：直线 $x=\frac{7\pi}{12}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴；

条件②：$(\frac{\pi}{3},0)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心 .

(18)（本小题共 14 分）

为迎接 2022 年北京冬季奥运会，普及冬奥知识，某地区小学联合开展了“冰雪答题王”冬奥知识竞赛活动．现从参加该活动的学生中随机抽取了 30 名学生，将他们的竞赛成绩（单位：分）用茎叶图记录如下：

男		女
	5	8
8 0	6	6 9
9 8 5	7	0 5 6 6 6 8 8
8 7 6 4 1	8	6 6
8 6 2 2 1	9	5 8 8

（Ⅰ）从该地区参加该活动的男生中随机抽取 1 人，估计该男生的竞赛成绩在 90 分以上的概率；

（Ⅱ）从该地区参加该活动的全体男生中随机抽取 2 人，全体女生中随机抽取 2 人，估计这 4 人中男生竞赛成绩在 90 分以上的人数比女生竞赛成绩在 90 分以上的人数多的概率；

（Ⅲ）为便于普及冬奥知识，现从该地区某所小学参加冬奥知识竞赛活动的学生中随机选取 10 名男生、10 名女生作为冬奥宣传志愿者．记这 10 名男生竞赛成绩的平均数为 μ_1，这 10 名女生竞赛成绩的平均数为 μ_2，能否认为 $\mu_1>\mu_2$，说明理由．

(19)(本小题共 14 分)

椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，E 是椭圆 C 上一点，且 $|F_1F_2|=2$，$|EF_1|+|EF_2|=4$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）M，N 是 y 轴上的两个动点（点 M 与点 E 位于 x 轴的两侧），$\angle MF_1N=\angle MEN=90°$，直线 EM 交 x 轴于点 P，求$\frac{|EP|}{|PM|}$的值.

(20)(本小题共 15 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $x-a\ln x=0$ 有两个不相等的实数根，记较小的实数根为 x_0，求证：$(a-1)x_0>a$.

(21)(本小题共 14 分)

已知有限集 X，Y，定义集合 $X-Y=\{x|x\in X$，且 $x\notin Y\}$，$|X|$ 表示集合 X 中的元素个数.

（Ⅰ）若 $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{3,4,5\}$，求集合 $X-Y$ 和 $Y-X$，以及 $|(X-Y)\cup(Y-X)|$ 的值；

（Ⅱ）给定正整数 n，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$. 对于实数集的非空有限子集 A，B，定义集合 $C=\{x|x=a+b,a\in A,b\in B\}$.

①求证：$|A-S|+|B-S|+|S-C|\geq 1$；

②求 $|(A-S)\cup(S-A)|+|(B-S)\cup(S-B)|+|(C-S)\cup(S-C)|$ 的最小值.