

ADC B C B D C AC AB AB BD

13-16 $[-\frac{1}{2}, 2]$ 64 $[\frac{1}{e}, e]$ $(\frac{1}{2}, +\infty)$

1. 解: 全集 $U=R$, 集合 $A=\{x|0\leq x\leq 1\}$, 集合 $B=\{x|x>4\}$,

$\complement_U A=\{x|x<0 \text{ 或 } x>1\}$, 则 $(\complement_U A)\cap B=(4, +\infty)$. 故选: A.

2. 解: 由题意得 $\neg p: \forall x>0, 2^x\leq x^2$. 故选: D

3. 解: 根据题意, 函数 $f(x)=\begin{cases} g(x)+1, x<0 \\ \log_2(1+x), x>0 \end{cases}$ 是奇函数,

设 $x<0$, 则 $-x>0$, 则 $f(x)=g(x)+1$, $f(-x)=\log_2(1-x)$,

又 $f(x)$ 是奇函数, 则有 $f(-x)=-f(x)$, 即 $\log_2(1-x)=-[g(x)+1]$, 则 $g(x)=-\log_2(1-x)-1$,

则 $g(-3)=-\log_2(1+3)-1=-2-1=-3$. 故选: C.

4. 解: \because 数列 $\{a_n\}$ 是正项递增等比数列, $\therefore a_2 a_4 = a_3^2 = 16$,

$\therefore a_3 = 4$, $\therefore a_2 + a_4 = 2a_3 + 2 = 10$,

由 $\begin{cases} a_2 + a_4 = 10 \\ a_2 \cdot a_4 = 16 \end{cases}$, 且数列 $\{a_n\}$ 是正项递增等比数列, 可得 $\begin{cases} a_2 = 2 \\ a_4 = 8 \end{cases}$,

$\therefore q^2 = \frac{a_4}{a_2} = 4$, $\therefore q = 2$, $\therefore a_1 = 1$, $\therefore S_6 = \frac{1 \times (1-2^6)}{1-2} = 2^6 - 1 = 63$, 故选: B.

5. 解: 根据题意, $f(x) = (2^x - 2^{-x}) \ln \sqrt{x^2 + 0.01}$, 其定义域为 R ,

又 $f(-x) = (2^{-x} - 2^x) \ln \sqrt{(-x)^2 + 0.01} = -(2^x - 2^{-x}) \ln \sqrt{x^2 + 0.01} = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数, 排除 AB,

因为 $f(2) = (4 - \frac{1}{4}) \ln \sqrt{4.01} > 0$, 所以排除 D.

故选: C.

6. 解: $\because f(x) = -\ln x + ax^2 + bx (x > 0)$, $\therefore f'(x) = -\frac{1}{x} + 2ax + b$,

\because 函数 $f(x) = -\ln x + ax^2 + bx$ 的一个极值点为 1,

$\therefore f'(1) = -1 + 2a + b = 0$, 即 $2a + b = 1$, 又 $a, b > 0$,

$\therefore \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = (\frac{2}{a} + \frac{1}{b})(2a + b) = 4 + 1 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 9$ (当且仅当 $\frac{2b}{a} = \frac{2a}{b}$, $a = b = \frac{1}{3}$ 时取等号),

即当 $a > 0, b > 0$ 时, $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 9, 故选: B.

7. 解: 奇函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数, $g(x) = xf(x)$,

可得 $g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$, 即 $g(x)$ 为偶函数,

当 $x \geq 0$ 时, $g'(x) = f(x) + xf'(x) \geq 0$, 即有 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增.

因为 $a = g(-\log_2 5.1) = g(\log_2 5.1)$, $2 < \log_2 5.1 < 3$, $1 < 2^{0.3} < 2$, 则 $1 < 2^{0.3} < 2 < \log_2 5.1 < 3$,

可得 $g(2^{0.3}) < g(\log_2 5.1) < g(3)$, 即 $b < a < c$, 故选: D.

8. 解: 由题设, $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f(x) \leq 0$, 可得 $k(x+1) \leq \frac{\ln x}{x}$,

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

所以 $0 < x < e$ 时 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 递增, 值域为 $(-\infty, \frac{1}{e})$;

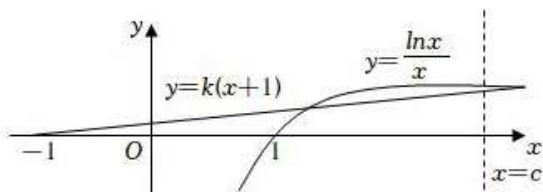
$x > e$ 时 $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 递减, 值域为 $(0, \frac{1}{e})$;

而 $y = k(x+1)$ 恒过 $(-1, 0)$, 函数图象如下:

要使 $k(x+1) \leq \frac{\ln x}{x}$ 有且只有两个整数解, 则 $y = k(x+1)$ 与 $g(x)$ 必有两个交点,

若交点的横坐标为 $x_1 < x_2$, 则 $1 < x_1 \leq 2 < 3 \leq x_2 < 4$,

所以, $\begin{cases} 3k \leq \frac{\ln 2}{2} \\ 4k \leq \frac{\ln 3}{3} \\ 5k > \frac{\ln 4}{4} \end{cases}$, 即 $\frac{\ln 2}{10} < k \leq \frac{\ln 3}{12}$. 故选: C.



二. 多选题 (共 4 小题)

9. 解: 对于 A: 由 $\frac{x-3}{x+2} \geq 0$ 解得 $x \geq 3$ 或 $x < -2$,

所以函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$ 的定义域为 $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$, 故 A 正确;

对于 B: $f(x) = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $g(x) = x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

定义域不相同, 所以 $f(x) = \frac{x^2}{x}$ 和 $g(x) = x$ 不是同一个函数, 故 B 错误;

对于 C: $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称,

且 $f(-x) = \frac{1}{-x} + x = -(\frac{1}{x} - x) = -f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 为奇函数,

所以函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x$ 的图象关于坐标原点对称, 故 C 正确;

对于 D: 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - 2f(-x) = x - 1$, 所以 $f(-x) - 2f(x) = -x - 1$, 解得 $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$,

故 D 错误; 故选: AC.

10. 解: 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x + 2$ 是增函数, 则此时 $f(x) \leq f(1) = 3$,

当 $x > 1$, $f(x) = -x^2 + 3$ 为减函数, 则此时 $f(x) < -1 + 3 = 2$, 综上 $f(x)$ 的最大值为 3, 故 A 正确,

$f(0) = 0 + 2 = 2$, 故 B 正确,

当 $x \leq 1$ 时, 由 $f(x) = -1$ 时, 得 $x + 2 = -1$, 此时 $x = -3$ 也成立, 故 C 错误,

当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x + 2$ 是增函数, 则 $f(x)$ 在定义域上不是减函数, 故 D 错误,

故选: AB.

11. 解: 因为 $a_n - 3a_{n+1} = 2a_n \cdot a_{n+1}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} + 1 = 3(\frac{1}{a_n} + 1)$, 又 $\frac{1}{a_1} + 1 = 2 \neq 0$,

所以 $\{\frac{1}{a_n} + 1\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列, $\frac{1}{a_n} + 1 = 2 \times 3^{n-1}$,

即 $a_n = \frac{1}{2 \times 3^{n-1} - 1}$, 所以 $\{a_n\}$ 为递减数列,

$\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和 $T_n = (2 \times 3^0 - 1) + (2 \times 3^1 - 1) + \dots + (2 \times 3^{n-1} - 1) = 2(3^0 + 3^1 + \dots + 3^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} - n = 3^n - n - 1$.

故选: AB.

12. 解: 根据题意, $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$,

又由函数 $f(x+2)$ 为偶函数, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则有 $f(-x) = f(4+x)$,

则有 $f(x+4) = -f(x)$, 即 $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数.

当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = \frac{1}{2} \log_3(x+a^2)$,

可得 $f(0) = 0$, 即 $\frac{1}{2} \log_3 a^2 = 0$, 解得 $a = \pm 1$, 故 A 错误;

由 $f(x+4) = f(-x)$, 可得 $f(1) = f(3)$, 故 B 正确;

$f(6) = f(-2) = -f(2)$, 故 C 错误;

$f(2022) = f(8 \times 252 + 6) = f(6) = f(-2) = -f(2) = -\frac{1}{2} \log_3(2+1) = -\frac{1}{2}$, 故 D 正确.

故选: BD.

三. 填空题 (共 4 小题)

13. 解: \because 函数 $y = f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$,

\therefore 由 $-2 \leq 2x - 1 \leq 3$, 解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. 即函数的定义域为 $[-\frac{1}{2}, 2]$. 故答案为: $[-\frac{1}{2}, 2]$.

14. 解: 对于函数 $f(x) = \log_a(10-3x)+9$, 令 $10-3x=1$, 求得 $x=3$, $f(x)=9$,

可得它的图象恒过定点 $A(3,9)$.

\because 点 A 在幂函数 $g(x)=x^\alpha$ 的图象上, $\therefore 3^\alpha=9$, $\therefore \alpha=2$, $g(x)=x^2$, 则 $g(8)=8^2=64$,

故答案为: 64.

15. 解: 根据题意, 因为定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 单调递增, 则所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递减;

又 $f(-1)=f(1)$, $f(\ln\frac{1}{a})=f(-\ln a)=f(\ln a)$, 于是由 $f(\ln a)+2f(\ln\frac{1}{a})\geq 3f(-1)$,

得 $3f(\ln a)\geq 3f(1)$, 从而有 $f(|\ln a|)\geq f(1)$, 则得 $|\ln a|\leq 1$, 即 $-1\leq \ln a\leq 1$, 且 $a>0$,

解得 $\frac{1}{e}\leq a\leq e$. 故 a 的取值范围是 $[\frac{1}{e}, e]$; 故答案为: $[\frac{1}{e}, e]$.

16. 解: 令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$,

因为 $f(x)+f(-x)=x^2$, 则 $g(-x)=f(-x)-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2-f(x)=-g(x)$,

所以 $g(x)$ 为奇函数,

因为 $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 均有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > \frac{x_1+x_2}{2} (x_1 \neq x_2)$,

当 $x_1 > x_2$ 时, $f(x_1)-\frac{1}{2}x_1^2 > f(x_2)-\frac{1}{2}x_2^2$, 即 $g(x_1) > g(x_2)$,

当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1)-\frac{1}{2}x_1^2 < f(x_2)-\frac{1}{2}x_2^2$, $g(x_1) < g(x_2)$,

综上, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 R 上为单调递增的奇函数,

由 $f(x)-f(1-x) > x-\frac{1}{2}$ 得 $f(x)-\frac{1}{2}x^2 > f(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2$,

即 $g(x) > g(1-x)$, 所以 $x > 1-x$, 所以 $x > \frac{1}{2}$. 故答案为: $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

四. 解答题 (共 6 小题)

17. 解: (1) \because 集合 $A = \{x | 1 \leq 2^x \leq 32\} = [0, 5]$, $B = (1, 6)$,

$\therefore A \cap B = (1, 5]$.

(2) $\because x \in C$ 是 $x \in (A \cap B)$ 的充分不必要条件, $\therefore C \subsetneq (A \cap B)$,

$\because C = \{x | 2a-1 \leq x \leq 2a+1\} \neq \emptyset$,

$\therefore \begin{cases} 2a-1 > 1 \\ 2a+1 \leq 5 \end{cases}$, $\therefore 1 < a \leq 2$, $\therefore a$ 的取值范围为 $(1, 2]$.

18. 解: (1) $\because ax^2 - 3x + 2 < 0$ 的解集为 $\{x | 1 < x < b\}$,

$\therefore 1$ 和 b 是 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的两个根,

根据根与系数的关系可知:
$$\begin{cases} 1+b = \frac{3}{a}, \\ 1 \times b = \frac{2}{a} \end{cases}, \therefore \begin{cases} a=1, \\ b=2; \end{cases}$$

(2) 由 (1) 可知 $a=1$,

$\therefore ax^2 - (m+a)x + 2(m-a) > 0$ 可化为 $x^2 - (m+1)x + 2(m-1) > 0$,

$\therefore (x-2)[x-(m-1)] > 0$,

① 当 $m-1=2$ 即 $m=3$ 时, $(x-2)[x-(m-1)] = (x-2)^2 > 0$, 此时解集为 $\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq 2\}$;

② 当 $m-1 > 2$ 即 $m > 3$ 时, 此时解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > m-1\}$;

③ 当 $m-1 < 2$ 即 $m < 3$ 时, 此时解集为 $\{x | x < m-1 \text{ 或 } x > 2\}$;

综上: 当 $m=3$ 时, 解集为 $\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq 2\}$;

当 $m > 3$ 时, 解集为 $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > m-1\}$;

当 $m < 3$ 时, 解集为 $\{x | x < m-1 \text{ 或 } x > 2\}$

19. 解: (I) 由 $a_n^2 + 2a_n = 4S_n + 3$, 可知 $a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} = 4S_{n+1} + 3$

两式相减得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 + 2(a_{n+1} - a_n) = 4a_{n+1}$,

即 $2(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n)$,

$\because a_n > 0, \therefore a_{n+1} - a_n = 2$,

\therefore 当 $n=1$ 时, $a_1^2 + 2a_1 = 4a_1 + 3, \therefore a_1 = -1$ (舍) 或 $a_1 = 3$,

则 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公差 $d=2$ 的等差数列, $\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$:

(II) $\because a_n = 2n+1$,

$\therefore b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$,

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n}{3(2n+3)}$.

20. 解: (1) 函数 $g(x) = a(x-1)^2 + 1 + b - a$,

$\because a > 0$, $\therefore g(x)$ 为开口向上的抛物线, 且对称轴为 $x=1$,

$\therefore g(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上是增函数, $\therefore \begin{cases} g(2)=1 \\ g(3)=4 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} b+1=1 \\ 3a+b+1=4 \end{cases}$

解得 $a=1, b=0$.

(2) 由 (1) 可得 $g(x) = x^2 - 2x + 1$, 则 $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$.

$\therefore f(\log_2 x) - 2k \log_2 x \geq 0$ 在 $x \in [2, 8]$ 上有解等价于 $\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} - 2 \geq 2k \log_2 x$ 在 $x \in [2, 8]$ 上有解.

即 $2k \leq \frac{1}{(\log_2 x)^2} - \frac{2}{\log_2 x} + 1$ 在 $x \in [2, 8]$ 上有解

令 $t = \frac{1}{\log_2 x}$, $\because x \in [2, 8]$, $\therefore t \in [\frac{1}{3}, 1]$, $\therefore 2k \leq t^2 - 2t + 1$ 在 $t \in [\frac{1}{3}, 1]$ 上有解,

记 $\varphi(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$,

则 $\varphi(t)$ 在 $[\frac{1}{3}, 1]$ 上为减函数, $\varphi(t)_{\max} = \varphi(\frac{1}{3}) = \frac{4}{9} \therefore 2k \leq \frac{4}{9}$, 则 $k \leq \frac{2}{9}$,

$\therefore k$ 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2}{9}]$.

21. 解: (1) 由题意可得 $f(0) = 0$, 解得 $b=1$,

再由 $f(1) = -f(-1)$, 得 $\frac{1-2}{4+a} = -\frac{1-2^{-1}}{2^0+a}$, 解得 $a=2$,

当 $a=2, b=1$ 时, $f(x) = \frac{1-2^x}{2^{x+1}+2}$ 的定义域为 R ,

由 $f(-x) = \frac{1-2^{-x}}{2^{-x+1}+2} = \frac{-1+2^x}{2+2^{x+1}} = -f(x)$, 可得 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $a=2, b=1$;

(2) 由 $2^x + kf(x) - 3 > 0$, 得 $k \cdot \frac{1-2^x}{2^{x+1}+2} > 3 - 2^x$, 因为 $x \in (1, 2)$, 所以 $\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2} < 0$,

所以 $k < \frac{(3-2^x)(2^{x+1}+2)}{1-2^x}$. 令 $-2^x+1=t$, 则 $t \in (-3, -1)$, 此时不等式可化为 $k < 2(\frac{4}{t}-t)$,

记 $h(t) = 2(\frac{4}{t}-t)$, 因为当 $t \in (-3, -1)$ 时, $y = \frac{4}{t}$ 和 $y = -t$ 均为减函数,

所以 $h(t)$ 为减函数, 故 $h(t) \in (-6, \frac{10}{3})$, 因为 $k < h(t)$ 恒成立, 所以 $k \leq -6$.

22. 解: (1) 因为 $f(x) \geq 0$, 所以 $x \ln x - mx + 1 \geq 0$,

即 $\ln x - m + \frac{1}{x} \geq 0$, 所以 $m \leq \ln x + \frac{1}{x}$,

令 $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$, 所以 $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$,

令 $F'(x) = 0$, 解得 $x=1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $F(x)$ 最小值为 $F(1) = 1$, 所以 $m \leq 1$;

(2) 因为 a, b 是 $x \ln x - mx + 1 = 0$ 的两个不相等的实数根,

所以 $a \ln a - ma + 1 = 0, b \ln b - mb + 1 = 0,$

即 $ma = a \ln a + 1, mb = b \ln b + 1$ (*)

由 (1) 可知当 $m \leq 1$ 时 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 方程 $f(x) = 0$ 不可能有两个不相等的实数根,

所以 $m \neq 0$, 由 (*) 可得 $\frac{b}{a} = \frac{b \ln b + 1}{a \ln a + 1}$, 即有 $ab = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$, ①

要证 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$, 即证 $\frac{a+b}{ab} > 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} > ab$, ②

由 ①② 可得即证 $\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$,

又 $b > a > 0$, 所以即证 $\ln \frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a} = \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$,

令 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 1$,

令 $G(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$, $G'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$,

所以 $G(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$G(t) > G(1) = 0$, 所以 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$, 得证.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

