高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z=\frac{2}{1-i}+i$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-3\leqslant 0\}$，$B=\{y|y=x^2+4x+3,x\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,1]$　　B. $(-1,1)$
C. $[-1,1)$　　D. $(-1,1]$

3. 已知 $p:x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$q:\sin x=1$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

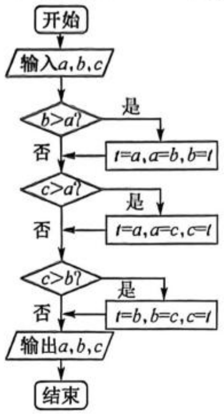
4. 已知 $\tan\theta=2$，则 $\sin\theta\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=$

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{2}{5}$

5. 水雾喷头布置的基本原则是：保护对象的水雾喷头数量应根据设计喷雾强度、保护面积和水雾喷头特性，按水雾喷头流量 q(单位：L/min)计算公式为 $q=K\sqrt{10P}$ 和保护对象的水雾喷头数量 N 计算公式为 $N=\frac{S\cdot W}{q}$ 计算确定，其中 P 为水雾喷头的工作压力(单位：MPa)，K 为水雾喷头的流量系数(其值由喷头制造商提供)，S 为保护对象的保护面积，W 为保护对象的设计喷雾强度(单位：L/min · m²)．水雾喷头的布置应使水雾直接喷射和完全覆盖保护对象，如不能满足要求时应增加水雾喷头的数量．当水雾喷头的工作压力 P 为 0.35 MPa，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，保护对象的保护面积 S 为 14 m²，保护对象的设计喷雾强度 W 为 20 L/min · m² 时，保护对象的水雾喷头的数量 N 约为(参考数据：$\sqrt{3.5}\approx 1.87$)

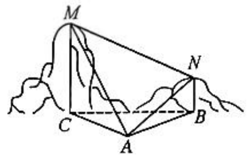
A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

6. 执行如图所示的程序框图，若输入的 a,b,c 分别为 3，6，9，则输出的结果为



A. 3，6，9　　B. 6，9，3　　C. 9，6，3　　D. 9，9，9

7. 如图，某景区为方便游客，计划在两个山头 M,N 间架设一条索道. 为测量 M,N 间的距离，施工单位测得以下数据：两个山头的海拔高度 $MC=100\sqrt{3}$ m，$NB=50\sqrt{2}$ m，在 BC 同一水平面上选一点 A，测得 M 点的仰角为 60°，N 点的仰角为 30°，以及 $\angle MAN=45°$，则 M,N 间的距离为

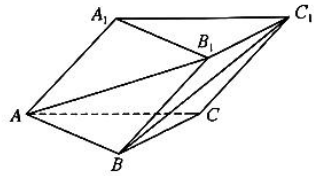


A. $100\sqrt{2}$ m　　B. 120 m　　C. $100\sqrt{3}$ m　　D. 200 m

8. 已知抛物线 $E:x^2=4y$，圆 $C:x^2+(y-3)^2=1$，P 为 E 上一点，Q 为 C 上一点，则 $|PQ|$ 的最小值为

A. 2　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 3

9. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面边长和侧棱长均相等，$\angle BAA_1=\angle CAA_1=60°$，则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为



A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 E 的左、右两支分别交于 A,B 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形，则双曲线 E 的离心率为

A. $2\sqrt{3}$　　B. 3　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x+1}$，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象，则

A. π 为 $f(x)$ 的一个周期

B. $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称

D. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{4},f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设 $a=\frac{2}{\ln 2}$，$b=\frac{e^2}{4-\ln 4}$，$c=2\sqrt{e}$，则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

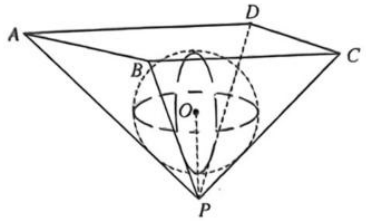
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+2y\geqslant 1,\\ x-y\leqslant 1,\\ y-2\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为________.

14. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，且 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=14$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$__________.

15. 已知圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 与圆 $E:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$，写出圆 C 和圆 E 的一条公切线的方程__________.

16. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 框架内放一个球 O，球 O 与侧棱 PA,PB,PC,PD 均相切. 若 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，且 $OP=2$，则球 O 的表面积为__________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

无论是国际形势还是国内消费状况，2023 年都是充满挑战的一年，为应对复杂的经济形势，各地均出台了促进经济发展的各项政策，积极应对当前的经济形势，取得了较好的效果. 某市零售行业为促进消费，开展了新一轮的让利促销的活动，活动之初，利用各种媒体进行大量的广告宣传. 为了解大众传媒对本次促销活动的影响，在本市内随机抽取了 6 个大型零售卖场，得到其宣传费用 x（单位：万元）和销售额 y（单位：万元）的数据如下：

卖场	1	2	3	4	5	6
宣传费用	2	3	5	6	8	12
销售额	30	34	40	45	50	60

（1）求 y 关于 x 的线性回归方程，并预测当宣传费用至少多少万元时（结果取整数），销售额能突破 100 万元；

（2）经济活动中，人们往往关注投入和产出比，在这次促销活动中，设销售额与投入的宣传费用的比为 λ，若 $\lambda\geqslant 9$，则称这次宣传策划是高效的，否则为非高效的. 从这 6 家卖场中随机抽取 3 家，求这 3 家卖场中至少有 1 家宣传策划高效的概率.

附：参考数据 $\sum\limits_{i=1}^{6}x_iy_i=1\ 752$，回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$ 的最小二乘法的估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

18.（本小题满分 12 分）

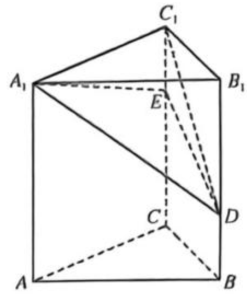
已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$，若 $a_2+a_3+a_4=14$，且 a_2,a_3+1,a_4 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 1，3，5 项.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\dfrac{2a_n}{(a_{n+1}-1)(a_{n+2}-1)}+\dfrac{b_n}{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.(本小题满分 12 分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 为 CC_1 上一点，$AB=CE=2$，$AA_1=3$，D 为 BB_1 上一点，三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



(1)求证：平面 $A_1DE\perp$平面 ABB_1A_1；

(2)求点 E 到平面 A_1C_1D 的距离.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 $l:y=k_1x(k_1\neq0)$与 E 交于 A，B 两点，当 l 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一条渐近线时，A 到 y 轴的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1)求 E 的方程；

(2)若过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 H，OH 的中点为 N(O 为坐标原点)，连接 AN 并延长交 E 于点 P，直线 PB 的斜率为 k_2，求 $|k_1-k_2|$ 的最小值.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$有两个不同的零点，求 a 的取值范围；

(2)若函数 $g(x)=\frac{x}{2}f(x)-ax^2-x$ 有两个不同的极值点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，证明：$\ln x_1+2\ln x_2>3$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=1$.

(1)求 C 的直角坐标方程以及 C 与 y 轴交点的极坐标；

(2)若直线 l 与 C 交于点 A，B，与 x 轴交于点 P，求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4－5：不等式选讲

已知关于 x 的不等式 $|x^2+ax+b|\leqslant2|x-4|\cdot|x+2|$ 对任意实数 x 恒成立.

(1)求满足条件的实数 a，b 的所有值；

(2)若 $x^2+ax+b\geqslant(m+2)x-m-15$ 对 $x>1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

高三文科数学综合参考答案、提示及评分细则

1. D　$z=\frac{2}{1-i}+i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+i=1+i+i=1+2i$，所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 D.

2. A　由 $x^2+2x-3\leqslant 0$，得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，所以 $A=[-3,1]$，因为 $y=(x+2)^2-1$，且 $x\in[-3,1]$，所以 $-1\leqslant y\leqslant 8$，所以 $B=[-1,8]$，所以 $A\cap B=[-1,1]$. 故选 A.

3. B　若 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $\sin x=1$，或 $\sin x=-1$，故由 p 得不到 q；若 $\sin x=1$，则 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以由 q 可以推出 p，故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

4. D　$\sin\theta\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta\cos\theta=-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=-\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=-\frac{2}{5}$. 故选 D.

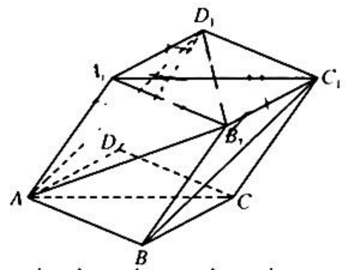
5. C　由题意知，保护对象的水雾喷头的数量约为 $N=\frac{SW}{q}=\frac{SW}{K\sqrt{10P}}=\frac{14\times 20}{24.96\times\sqrt{10\times 0.35}}\approx\frac{280}{24.96\times 1.87}\approx 5.998\ 9\approx 6$. 故选 C.

6. C　该程序框图的功能是将输入的 3 个数字按从大到小的顺序排序. 故选 C.

7. A　由题意知 $\angle MAC=60°$，$\angle NAB=30°$，$MC=100\sqrt{3}$ m，$NB=50\sqrt{2}$ m，$\angle MAN=45°$，$\angle MCA=\angle NBA=90°$，所以 $AM=200$ m，$AN=100\sqrt{2}$ m，在 $\triangle AMN$ 中，由余弦定理得 $MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos\angle MAN=20\ 000$，所以 $MN=100\sqrt{2}$ m. 故选 A.

8. B　由题意知 $C(0,3)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=4y_0$，$|PC|=\sqrt{x_0^2+(y_0-3)^2}=\sqrt{y_0^2-2y_0+9}=\sqrt{(y_0-1)^2+8}$，所以当 $y_0=1$ 时，$|PC|_{\min}=2\sqrt{2}$，所以 $|PQ|_{\min}=2\sqrt{2}-1$. 故选 B.

9. A　将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图所示），则 $\angle B_1AD_1$ 即为所求的角或其补角. 设三棱柱底面边长和侧棱长均为 1. 在 $\triangle AB_1D_1$ 中，$AB_1=\sqrt{3}$，$B_1D_1=\sqrt{3}$，$AD_1=\sqrt{2}$，$\cos\angle B_1AD_1=\frac{AB_1^2+AD_1^2-B_1D_1^2}{2AB_1\cdot AD_1}=\frac{3+2-3}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.



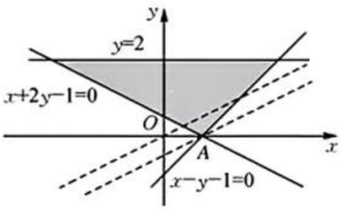
10. C　由双曲线的定义，得 $|AF_2|-|AF_1|=2a$，$|BF_1|-|BF_2|=2a$，又 $|AF_2|=|AB|=|BF_2|$，所以 $|AF_1|=2a$，$|BF_1|=6a$，$|BF_2|=4a$，在 $\triangle BF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cos\frac{\pi}{3}$，即 $4c^2=36a^2+16a^2-2\times 6a\times 4a\times\frac{1}{2}=28a^2$，所以 $\frac{c^2}{a^2}=7$，即 $e^2=7$，所以 $e=\sqrt{7}$. 故选 C.

11. B　对于 A，$f(x+\pi)=\frac{-\sin x-\cos x}{\sin x\cos x+1}=-f(x)$，故 π 不是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；对于 B，令 $t=\sin x+\cos x$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，所以原函数变为 $y=\frac{2t}{t^2+1}$，当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $t\neq 0$ 时，$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$，又 $\left|t+\frac{1}{t}\right|\geqslant 2$，所以 $\frac{1}{y}\leqslant -1$，或 $\frac{1}{y}\geqslant 1$，所以 $-1\leqslant y<0$，或 $0<y\leqslant 1$，综上 $-1\leqslant y\leqslant 1$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，故 B 正确；对于 C，$g(x)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{1-\frac{1}{2}\cos 2x}$，易得 $g(-x)=-g(x)$，$g(-x)-g(x)=-2g(x)\neq 0$，故 $g(x)$ 为奇函数，不是偶函数，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 不对称，故 C 错误；对

于D，$f'(x)=\frac{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}{(\sin x\cos x+1)^2}$，所以 $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，故D错误.故选B.

12. D 设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}(x>1)$，则 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $f'(x)<0$，得 $1<x<e$，令 $f'(x)>0$，得 $x>e$，所以 $f(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减；在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递增，又 $a=f(2)=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}=f(4)$，$b=\frac{e^2}{4-\ln 4}=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，$c=2\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}=f(\sqrt{e})$，且 $1<\sqrt{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$，所以 $f(\sqrt{e})>f(2)=f(4)>f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，即 $c>a>b$.故选D.

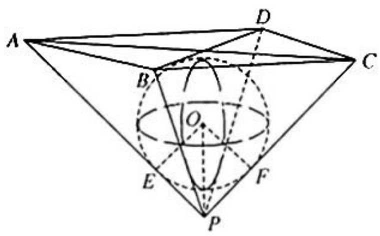
13. 1 画出可行域(如图所示阴影部分)，移动直线 $x-2y-z=0$，当直线经过点A时，z最大，易求点A的坐标为(1,0)，故 $z_{max}=1$. 来源：高三答案公众号



14. $3\sqrt{2}$ 由 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=20-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4=14$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{10+4+4}=3\sqrt{2}$.

15. $x-\sqrt{3}y+1=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$，或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$(写出一个即可得分) 由题意，得圆C与圆E相外切，且 $C(1,0)$，$E(0,\sqrt{3})$，则 $k_{CE}=-\sqrt{3}$，过CE中点且与CE垂直的直线是两圆的内公切线，其方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即内公切线方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$；又圆C与圆E半径相等，故外公切线与CE平行，所以圆C与圆E的外公切线的方程可设为 $y=-\sqrt{3}x+b$，即 $\sqrt{3}x+y-b=0$，则 $\frac{|\sqrt{3}\times1+0-b|}{2}=1$，所以 $b=\sqrt{3}+2$ 或 $b=\sqrt{3}-2$，所以两条外公切线的方程为 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$，或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$.

16. 8π 连接AC，BD，由题意得 $PA=PB=PC=PD=AB=BC=CD=DA$，又 $AC=BD=\sqrt{2}AB$，所以 $\angle APC=\frac{\pi}{2}$，设球O与PA，PC的切点分别为E，F，连接OE，OF，因为 $OE=OF$，所以 $\angle OPE=\angle OPF=\frac{\pi}{4}$，所以 $OE=OP\sin\frac{\pi}{4}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，即球O的半径 $R=\sqrt{2}$，所以球O的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$.



17. 解：(1) $\bar{x}=\frac{2+3+5+6+8+12}{6}=6$，$\bar{y}=\frac{30+34+40+45+50+60}{6}=\frac{259}{6}$，………… 2分

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=2^2+3^2+5^2+6^2+8^2+12^2=282$，………… 3分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{1752-6\times6\times\frac{259}{6}}{282-6\times6^2}=\frac{198}{66}=3$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{\quad}{6}-3\times6=\frac{\quad}{6}$, ………………………………………………………… 5分

所以 $\hat{y}=3x+\frac{151}{6}$. ………………………………………………………… 6分

令 $3x+\frac{151}{6}=100$,解得 $x=\frac{449}{18}=24.9\dot{4}$(万元).

故当宣传费用至少为 25 万元时,销售额能突破 100 万元. ………………………………………………………… 7分

(2)由题意知宣传策划是高效的仅有 2 家,记作 a,b,余下的记作 A,B,C,D.

所以从中取出 3 家,基本事件有:abA,abB,abC,abD,aAB,aAC,aAD,aBC,aBD,aCD,bAB,bAC,bAD,bBC,bBD,bCD,ABC,ABD,ACD,BCD,共 20 个. ………………………………………………………… 9分

其中至少含有 1 家宣传策划是高效的有:abA,abB,abC,abD,aAB,aAC,aAD,aBC,aBD,aCD,bAB,bAC,bAD,bBC,bBD,bCD,共 16 个. ………………………………………………………… 11分

故所求概率 $P=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$. ………………………………………………………… 12分

18. 解:(1)因为 a_2,a_3+1,a_4 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 1,3,5 项,

所以 $2(a_3+1)=a_2+a_4$, ………………………………………………………… 1分

又 $a_2+a_3+a_4=14$,所以 $a_3=4$,且 $a_2+a_4=10$.

即 $a_1q^2=4$,$a_1q(1+q^2)=10$. ………………………………………………………… 2分

所以 $\begin{cases}q=3,\\a_1=\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\a_1=16\end{cases}$(舍),所以 $a_n=2^{n-1}$; ………………………………………………………… 3分

又 $b_1=a_2=2$,$b_3=a_3+1=5$,故 $\{b_n\}$ 的公差 $d=\frac{b_3-b_1}{3-1}=\frac{3}{2}$

所以 $b_n=2+\frac{3}{2}(n-1)=\frac{3n+1}{2}$. ………………………………………………………… 4分

(2)由(1)知 $c_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}+\frac{3n+1}{2^n}$,

令 $d_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$,$e_n=\frac{3n+1}{2^n}$,设数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 A_n,数列 $\{e_n\}$ 的前 n 项和为 B_n,

则 $S_n=A_n+B_n$, ………………………………………………………… 5分

因为 $d_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$, ………………………………………………………… 6分

所以 $A_n=\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ………………………………………………………… 8分

因为 $B_n=\frac{4}{2^1}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}+\frac{3n+1}{2^n}$,来源:高三答案公众号

所以 $\frac{1}{2}B_n=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\cdots+\frac{3n-2}{2^n}+\frac{3n+1}{2^{n+1}}$,

两式相减,得 $\frac{1}{2}B_n=2+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^n}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}$

$=2+3\times\frac{\frac{1}{2^2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{7}{2}-\frac{3n+7}{2^{n+1}}$, ………………………………………………………… 10分

所以 $B_n=7-\frac{3n+7}{2^n}$. ………………………………………………………… 11分

所以 $S_n=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}+7-\frac{3n+7}{2^n}=8-\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{3n+7}{2^n}$. ……………………………… 12分

19. (1)证明:分别取 AB、A_1D 的中点 O、F,连接 CO、FO、EF,则 $CO\perp AB$,$CO\perp AA_1$,$OF/\!/AA_1/\!/BD$,且 $OF=\frac{AA_1+BD}{2}$,
…………………………………………………………………………………… 2分

因为三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot B_1D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\cdot B_1D=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,解得 $B_1D=2$,所以 $BD=1$. ……………………………… 3分

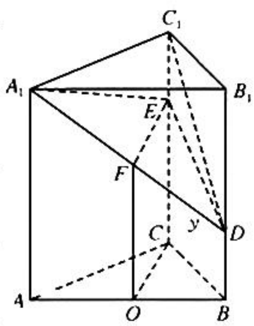
所以 $OF=2$,又 $OF/\!/AA_1/\!/CE$,$CE=2$,

所以 $OF/\!/CE$,且 $OF=CE$,所以四边形 $CEFO$ 为平行四边形,

所以 $EF/\!/CO$,所以 $EF\perp AB$,$EF\perp AA_1$, ………………………………………………… 4分

又 $AA_1\cap AB=A$,AA_1,$AB\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $EF\perp$平面 ABB_1A_1,

因为 $EF\subset$平面 A_1DE,所以平面 $A_1DE\perp$平面 ABB_1A_1. ……………………………………… 6分



(2)解:由题意得 $DA_1=DC_1=2\sqrt{2}$,点 D 到平面 A_1C_1E 的距离为$\sqrt{3}$. ………………… 7分

所以 $V_{三棱锥D-A_1C_1E}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 8分

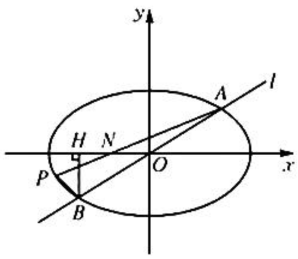
又 $A_1C_1=2$,所以 $S_{\triangle DA_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1}=\sqrt{7}$. ……………………………… 9分

设点 E 到平面 A_1C_1D 的距离为 d,则 $V_{三棱锥E-A_1C_1D}=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}d=\frac{\sqrt{7}}{3}d$. ………………… 10分

所以$\frac{\sqrt{7}}{3}d=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $d=\frac{\sqrt{21}}{7}$,即点 E 到平面 A_1C_1D 的距离为$\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………… 12分

20. 解:(1)设 E 的半焦距为 c,则$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a=\sqrt{2}b$. ① ……………………………… 1分

不妨设 $l:y=\frac{1}{a}x$,与$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$联立,得$|x|=\frac{ab}{\sqrt{b^2+1}}$.



由题意得$|x|=\frac{ab}{\sqrt{b^2+1}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ② ……………………………………………… 3分

①②联立并解得 $b^2=2$,$a^2=4$,故 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………… 5分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$P(x_2,y_2)$,则 $B(-x_1,-y_1)$,$H(-x_1,0)$,$N\left(-\frac{x_1}{2},0\right)$,

所以直线 AP 的斜率 $k=\frac{y_1-0}{x_1-\left(-\frac{x_1}{2}\right)}=\frac{2y_1}{3x_1}=\frac{2}{3}k_1$, ……………………………………… 6分

直线 AP 的方程为 $y=k\left(x+\frac{x_1}{2}\right)$,代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,得 $(2k^2+1)x^2+2k^2x_1x+\frac{1}{2}k^2x_1^2-4=0$.

所以 $x_1+x_2=-\frac{2k^2x_1}{2k^2+1}$, ………………………………………………………………… 8分

$y_1+y_2=k\left(x_1+\frac{x_1}{2}\right)+k\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)=k(x_1+x_2+x_1)=\frac{kx_1}{2k^2+1}$, ………………………………… 9分

所以 $k_2=\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{\frac{kx_1}{2k^2+1}}{-\frac{2k^2x_1}{2k^2+1}}=-\frac{1}{2k}=-\frac{1}{2\times\frac{2}{3}k_1}=-\frac{3}{4k_1}$， ………………………………………………………… 10 分

所以 $|k_1-k_2|=\left|k_1+\frac{3}{4k_1}\right|=|k_1|+\frac{3}{4|k_1|}\geqslant2\sqrt{|k_1|\times\frac{3}{4|k_1|}}=\sqrt{3}$，当且仅当 $|k_1|=\frac{3}{4|k_1|}$，即 $k_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立，所以当 $k_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$|k_1-k_2|$ 取得最小值，且最小值为 $\sqrt{3}$． ………………………………………………………… 12 分

21.(1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{2x-a}{x^2}$． ………………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 最多有一个零点，不合题意，舍去； ……………… 2 分

当 $a>0$ 时，当 $0<x<\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增． ………………………………………………………… 3 分

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点，则 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{2}\right)=2\ln\frac{a}{2}+2<0$，解得 $0<a<\frac{2}{e}$． ……………………………… 4 分

当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时，$f\left(\frac{a}{2}\right)<0$，$f(e)=2+\frac{a}{e}>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},e\right)$ 上存在唯一零点；

当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时，取正整数 $n>2$，则 $0<\frac{a}{n}<\frac{a}{2}$，$f(x)=\frac{2x\ln x+a}{x}>0\Leftrightarrow x\ln x>-\frac{a}{2}$，

而 $\frac{a}{n}\ln\frac{a}{n}>-\frac{a}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{a}{n}>-\frac{n}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{n}>e^{-\frac{n}{2}}\Leftrightarrow\frac{a}{2}>\frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$，当 $x>1$ 时易证 $e^x>x^2$，

又 $\frac{n}{2}>1$，所以 $e^{\frac{n}{2}}>\left(\frac{n}{2}\right)^2$，于是 $\frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}<\frac{\frac{n}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}=\frac{2}{n}$，要使 $\frac{a}{2}>\frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$，只需 $\frac{a}{2}>\frac{2}{n}$，即 $n>\frac{4}{a}$．

这样，当 $0<a<\frac{2}{e}$ 时，只需取正整数 $n>\frac{4}{a}$，则 $f\left(\frac{a}{n}\right)>0$．

又 $f\left(\frac{a}{2}\right)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 内存在唯一零点．

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$． ………………………………………………………… 6 分

(2)证明：$g(x)=\frac{x}{2}f(x)-ax^2-x=x\ln x-ax^2-x+\frac{a}{2}$，则 $g'(x)=\ln x-2ax$，

因为 $g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则 $\ln x_1=2ax_1$，$\ln x_2=2ax_2$，

要证 $\ln x_1+2\ln x_2>3$，只要证 $3<2ax_1+4ax_2=2a(x_1+2x_2)$，

因为 $0<x_1<x_2$，所以只要证 $2a>\frac{3}{x_1+2x_2}$． ………………………………………………………… 8 分

又由 $\ln x_1=2ax_1$，$\ln x_2=2ax_2$，作差得 $\ln\frac{x_1}{x_2}=2a(x_1-x_2)$，所以 $2a=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

所以原不等式等价于 $\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\frac{3}{x_1+2x_2}$，即 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1+2x_2}=\frac{3\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+2}$．

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，只需证明 $\ln t<\frac{3(t-1)}{t+2}$． ………………………………………………………… 10 分

令 $h(t)=\ln t-\frac{3(t-1)}{t+2}$，$t\in(0,1)$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{9}{(t+2)^2}=\frac{t^2-5t+4}{t(t+2)^2}=\frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2}>0$， ……………………… 11 分

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h(t)<h(1)=0$，即 $\ln t<\frac{3(t-1)}{t+2}$.

所以 $\ln x_1+2\ln x_2>3$. ………… 12 分

22. 解：(1)由 $\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=1$，得 $\rho\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}=1$，即 $\rho-\rho\cos\theta=2$. ………… 1 分

又 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=\rho\cos\theta$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}-x=2$. ………… 2 分

化简，得 $y^2=4x+4$，即 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x+4$. ………… 3 分

其与 y 轴交点的直角坐标为 $(0,2)$ 和 $(0,-2)$， ………… 4 分

对应的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$.（答案不唯一，符合即可得分） ………… 5 分

(2)易知点 P 的直角坐标为 $(1,0)$，将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程，得 $3t^2-8t-32=0$， ………… 6 分

显然 $\Delta=(-8)^2-4\times3\times(-32)=448>0$， ………… 7 分

设点 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\frac{8}{3}$，$t_1t_2=-\frac{32}{3}$，来源：高三答案公众号

显然 t_1，t_2 一正一负， ………… 8 分

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}$

$=\frac{\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{32}{3}\right)}}{\text{[illegible]}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. ………… 10 分

23. 解：(1)当 $x=4$ 时，不等式化为 $|16+4a+b|\leqslant0$，

而 $|16+4a+b|\geqslant0$，

所以 $|16+4a+b|=0$.① ………… 2 分

当 $x=-2$ 时，同理可得 $|4-2a+b|=0$.② ………… 3 分

联立①和②，解得 $a=-2$，$b=-8$. ………… 4 分

而 $a=-2$，$b=-8$ 时，原不等式为 $|x^2-2x-8|\leqslant2|x^2-2x-8|$，

显然恒成立，所以 $a=-2$，$b=-8$. ………… 5 分

(2)由(1)知 $x^2-2x-8\geqslant(m+2)x-m-15$，

所以 $(x-1)m\leqslant x^2-4x+7$， ………… 6 分

因为 $x>1$，所以 $x-1>0$，所以 $m\leqslant\frac{x^2-4x+7}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $y=\frac{x^2-4x+7}{x-1}(x>1)$，则 $m\leqslant y_{\min}$. ………… 7 分

因为 $y=\frac{x^2-4x+7}{x-1}=x-1+\frac{4}{x-1}-2\geqslant2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}-2=2$， ………… 8 分

当且仅当 $x-1=\frac{4}{x-1}$，即 $x=3$ 时等号成立，所以 $y_{\min}=2$， ………… 9 分

所以 $m\leqslant2$，即实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ………… 10 分