

(在此卷上答题无效)

2023~2024 学年福州市高三年级第一次质量检测

数学试题

(完卷时间 120 分钟; 满分 150 分)

第 I 卷

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 - i$, 则在复平面内, z 对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

3. 已知点 $P(x_0, 2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上, 则 P 到 C 的准线的距离为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

4. “二十四节气”是中国古代劳动人民伟大的智慧结晶, 其划分如图所示. 小明打算在网上搜集一些与二十四节气有关的古诗. 他准备在春季的 6 个节气与夏季的 6 个节气中共选出 3 个节气, 若春季的节气和夏季的节气各至少选出 1 个, 则小明选取节气的不同情况的种数是

- A. 90 B. 180
C. 270 D. 360



5. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 190000 cm^3 , 其上、下底面边长分别为 60 cm 和 40 cm, 则该油槽的深度为

- A. $\frac{75}{4}$ cm B. 25 cm C. 50 cm D. 75 cm

高三数学 — 1 — (共 4 页)

6. 一个袋子中有大小和质地相同的4个球,其中有2个红球,2个黄球,每次从中随机摸出1个球,摸出的球不再放回.则第二次摸到黄球的条件下,第一次摸到红球的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

7. 已知 $a = \frac{1}{e}$, $b = \ln\sqrt{2}$, $c = \ln\sqrt[5]{5}$, 则

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

8. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = \sin\omega x + \cos\omega x$ ($\omega > 0$) 的图象在区间 $[0, \pi]$ 上恰有5条对称轴, 则 ω 的取值范围为

- A. $\left[\frac{17}{4}, \frac{21}{4}\right)$ B. $\left(\frac{17}{4}, \frac{25}{4}\right]$ C. $\left[\frac{17}{4}, \frac{25}{4}\right]$ D. $\left[\frac{33}{4}, \frac{41}{4}\right)$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 某市抽查一周空气质量指数变化情况, 得到一组数据: 80, 76, 73, 82, 86, 75, 81. 以下关于这组数据判断正确的有

- A. 极差为13 B. 中位数为82 C. 平均数为79 D. 方差为124

10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: y = k(x + \sqrt{3}) - 1$, 则

- A. l 恒过定点 $(\sqrt{3}, -1)$ B. 若 l 平分圆周 M , 则 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$
C. 当 $k = \sqrt{3}$ 时, l 与圆 M 相切 D. 当 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ 时, l 与圆 M 相交

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ 有两个极值点, 则

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 2)$ 对称 B. $f(x)$ 的极值之和为 -4
C. $\exists a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 有三个零点 D. 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点

12. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为2, 球 O 与正四棱柱的上、下底面及侧棱都相切. P 为平面 CDD_1 上一点, 且直线 BP 与球 O 相切, 则

- A. 球 O 的表面积为 4π B. 直线 BD_1 与 BP 夹角等于 45°
C. 该正四棱柱的侧面积为 $16\sqrt{2}$ D. 侧面 ABB_1A_1 与球面的交线长为 2π

高三数学 — 2 — (共4页)

第 II 卷

注意事项:

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 答案无效.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a=(1, 2), b=(1+\lambda, 2-\lambda)$, 若 $a \perp b$, 则实数 λ 的值为_____.

14. 将圆周 16 等分, 设每份圆弧所对的圆心角为 θ , 则 $\sin\theta\cos\theta$ 的值为_____.

15. 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 同时具有下列三个性质, 则 $f(x) =$ _____. (写出一个满足条件的函数即可)

① $f(x+y) = f(x) + f(y)$; ② $f'(x)$ 是偶函数; ③ 当 $x+y > 0$ 时, $f(x) + f(y) < 0$.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F , 两条渐近线分别为 l_1, l_2 .

点 A 在 l_1 上, 点 B 在 l_2 上, 且点 A 位于第一象限, 原点 O 与 B 关于直线 AF 对称. 若 $|AF| = 2b$, 则 C 的离心率为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = S_n + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_{2n-1}$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b = \sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$.

(1) 若 $c = 2$, 求 a ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

国际上常采用身体质量指数 (Body Mass Index, 缩写 BMI) 来衡量人体肥瘦程度, 其计算公式是 $BMI = \frac{\text{体重 (单位: kg)}}{\text{身高}^2 \text{ (单位: m}^2\text{)}}$. 为了解某公司员工的身体肥瘦情况, 研究人员从该公司员工体检数据中, 采用比例分配的分层随机抽样方法抽取了 50 名男员工、30 名女员工的身高和体重数据. 计算得到他们的 BMI 值, 并根据“中国成人的 BMI 数值标准”简称“指标”整理得到如下结果:

高三数学 — 3 — (共 4 页)

| 性别 \ 指标 人数 | 偏瘦 (BMI < 18.5) | 正常 (18.5 ≤ BMI < 24) | 偏胖 (24 ≤ BMI < 28) | 肥胖 (BMI ≥ 28) |
|---------------|--------------------|-------------------------|-----------------------|------------------|
| 男 | 12 | 17 | 11 | 10 |
| 女 | 9 | 11 | 7 | 3 |

(1) 若该公司男员工有 1 500 名, 则该公司共有多少名员工?

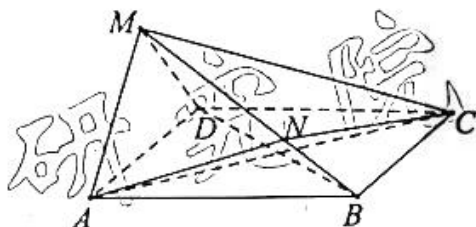
(2) 以频率估计概率, 分别从该公司男、女员工中各随机抽取 2 名员工, 求抽到的员工中至少有一名是肥胖的概率.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在底面为菱形的四棱锥 $M-ABCD$ 中, $AD=BD=MB=2$, $MA=MD=\sqrt{2}$.

(1) 求证: 平面 $MAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 已知 $\vec{MN} = 2\vec{NB}$, 求直线 BN 与平面 ACN 所成角的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F , 左、右顶点分别为 A, B . 点 C 在 E 上,

$P(4, y_P), Q(4, y_Q)$ 分别为直线 AC, BC 上的点.

(1) 求 $y_P \cdot y_Q$ 的值;

(2) 设直线 BP 与 E 的另一个交点为 D , 求证: 直线 CD 经过 F .

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - a$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l , l 在 x 轴上的截距为 x_2 ($x_2 > 0$).

(1) 当 $x_1 = e, a = 1$ 时, 求切线方程;

(2) 证明: $|x_1 - e^a| \geq |x_2 - e^a|$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw