绝密★启用前

2024届高三名校9月联合测评

数学试题

（测试时间：120分钟　卷面总分：150分）

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上．将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”．

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4. 考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合 $A=\{x|e^x>2\}$，$B=\{x|\sqrt{x}<9\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|\ln 2<x<3\}$　　B. $\{x|\ln 2<x<81\}$　　C. $\{x|e^2<x<81\}$　　D. $\{x|x>0\}$

2. 若 $\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}=i$，则 z 的实部与虚部之比为

A. -1　　B. 1　　C. $-i$　　D. i

3. 已知平面单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{2}=\boldsymbol{0}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

4. 汉代初年成书的《淮南万毕术》记载：“取大镜高悬，置水盆于下，则见四邻矣．”这是中国古代人民利用平面镜反射原理的首个实例，体现了传统文化中的数学智慧．平面镜反射原理可概述为：反射光线和入射光线分居在法线的两侧；反射角等于入射角．在平面直角坐标系 xOy 中，一条光线从点 $(-2,0)$ 射出，经 y 轴反射，若反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 相切，则该反射光线所在直线的斜率为

A. -1　　B. -1 或 1　　C. 1　　D. 2

5. 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $2S_3=7a_2$，则 $\frac{S_4}{a_2}=$

A. $\frac{15}{2}$　　B. $\frac{15}{4}$　　C. $\frac{15}{2}$ 或 $\frac{15}{4}$　　D. $\frac{15}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$

6. 已知圆锥 SO 的轴截面为正三角形，若平行于圆锥 SO 底面的平面截圆锥 SO 所得的圆锥 SO_1 与圆台 O_1O 的体积之比为 $1:7$，则圆锥 SO_1 与圆台 O_1O 的表面积之比为

A. $\frac{3}{11}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 在概率论和统计学中用协方差来衡量两个变量的总体误差，对于离散型随机变量 X,Y，定义协方差为 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，已知 X,Y 的分布列如下表所示，其中 $0<p<1$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 的值为

X	1	2
P	p	$1-p$

Y	1	2
P	$1-p$	p

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

8. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，若 $2(e^{2y}-e^{x})=(y-x)(y+x+2)$，则下列关系式不成立的为

A. $y>x>0$　　B. $x>y>0$　　C. $x<y<0$　　D. $x=y=0$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由这组数据得到新样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $y_i=ax_i+b(i=1,2,\cdots,n,0<a<1)$，则

A. 新样本数据的样本平均数小于原样本数据的样本平均数

B. 新样本数据的标准差不大于原样本数据的标准差

C. 新样本数据的极差不大于原样本数据的极差

D. 新样本数据的上四分位数不小于原样本数据的上四分位数

10. 若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

A. X 的密度曲线与 y 轴只有一个交点　　B. X 的密度曲线关于 $x=\sigma$ 对称

C. $2P(X>\mu+3\sigma)=P(|X-\mu|>3\sigma)$　　D. 若 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$，则 $E(Y)=0,D(Y)=1$

11. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的任意一条对称轴与其相邻的零点之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$，若将曲线 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的图象关于 y 轴对称，则

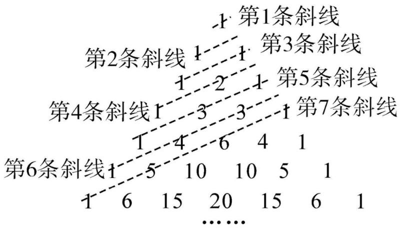
A. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条对称轴

C. 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 单调递增，则 $0<a\leqslant\frac{\pi}{3}$

D. 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5\pi}{24}$ 有且仅有 5 个交点

12. 为引导游客领略传统数学研究的精彩并传播中国传统文化，某景点推出了“解数学题获取名胜古迹入场码”的活动. 活动规则如下：如图所示，将杨辉三角第 p 行第 q 个数记为 $a_{p,q}(p,q\in\mathbf{N}^*)$，并从左腰上的各数出发，引一组平行的斜线，记第 n 条斜线上所有数字之和为 $S_n(S_1=S_2=1,S_3=2)$，入场码由两段数字组成，前段的数字是 $\sum\limits_{i=1}^{4}a_{4,i}10^{4-i}$ 的值，后段的数字是 $S_{2\,023}-\sum\limits_{i=1}^{2\,021}S_i$ 的值，则



A. $a_{2\,023,2}=2\,023$

B. $\sum\limits_{i=1}^{4}a_{4,i}10^{4-i}=1\,331$

C. $S_9=34$

D. 该景点入场码为 13311

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x, x\leqslant 0,\\ \log_3 x, x>0,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$__________.

14. 设 $0<\alpha<90^\circ$，且 $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{6}{5}$，则 $\sin(\alpha-15^\circ)=$__________.

15. 某同学喜爱篮球和跑步运动. 在暑假期间，该同学下午去打篮球的概率为 $\frac{3}{4}$. 若该同学下午去打篮球，则晚上一定去跑步；若下午不去打篮球，则晚上去跑步的概率为 $\frac{2}{3}$. 已知该同学在某天晚上去跑步，则下午打过篮球的概率为__________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，两个焦点为 F_1,F_2. 若 P,Q 为椭圆 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，$\triangle PF_2Q$ 的面积 $S\geqslant\frac{1}{8}|PQ|^2$，则椭圆 C 的离心率的取值范围为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，△ABC 的面积为 S，$S=\frac{1}{4}ab\tan C$.

（1）求 C；

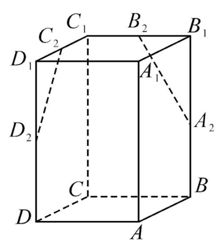
（2）若 $c=1$，$S=\frac{\sqrt{3}}{6}$，设 D 为边 AB 的中点，求 CD.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$，A_2，B_2，C_2，D_2 分别为棱 BB_1，B_1C_1，C_1D_1，DD_1 的中点.

（1）证明：A_2，B_2，C_2，D_2 四点在同一个平面；

（2）点 P 在棱 CC_1 上，满足 $A_1P\perp$ 平面 $A_2B_2C_2D_2$，求 AP 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值.



19.(本小题满分 12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,已知 $2(S_n-n)=na_n$.

(1)证明:$\{a_n\}$ 为等差数列;

(2)若 $a_1+a_3+\cdots+a_{13}=98$,证明:$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1$.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\log_a x+\frac{1}{2}x^2-(1+\log_a e)x,a>1$.

(1)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(2)若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,求 a 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

甲同学现参加一项答题活动,其每轮答题答对的概率均为 $\frac{1}{3}$,且每轮答题结果相互独立.若每轮答题答对得 5 分,答错得 0 分,记第 i 轮答题后甲同学的总得分为 X_i,其中 $i=1,2,\cdots,n$.

(1)求 $E(X_{99})$；

(2)若乙同学也参加该答题活动，其每轮答题答对的概率均为$\frac{2}{3}$，并选择另一种答题方式答题：从第 1 轮答题开始，若本轮答对，则得 20 分，并继续答题；若本轮答错，则得 0 分，并终止答题，记乙同学的总得分为 Y. 证明：当 $i>24$ 时，$E(X_i)>E(Y)$.

22.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E:y^2=2px(p\geqslant 2)$的焦点为 F，圆 F 以点 F 为圆心，半径为 1. 若过点 F 且倾斜角为$\frac{\pi}{3}$的直线与抛物线 E 及圆 F 自上而下依次交于 A,B,C,D 四点，则 $|AB|=9|CD|$.

(1)求抛物线 E 的方程；

(2)设 O 为坐标原点，点 T 为抛物线 E 上一点，过点 T 作圆 F 的两条切线，分别交抛物线 E 于 P,Q 两点，直线 PQ 分别交 x 轴正半轴、y 轴正半轴于 M,N 两点，求$\triangle MON$面积的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。