高 2023 届 第十三次适应性训练（文科数学）

一．选择题：本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

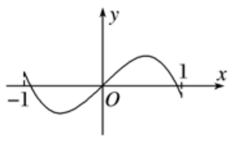
1. 已知集合 $A=\{x\,||x-1|<2\}$，$B=\{x\,|\log_3(x-1)<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

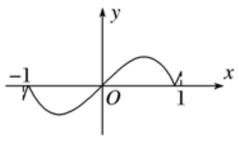
A. $\{x|1<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<3\}$　　C. $\{x|1<x<4\}$　　D. $\{x|-1<x<4\}$

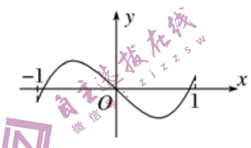
2. 已知复数 z 满足 $z\cdot(1-2i)=5i$，则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为（　　）

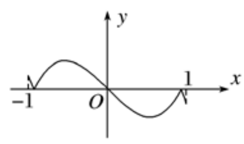
A. $\sqrt{5}$　　B. 5　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

3. 函数 $f(x)=x^3-\sin x$ 在$[-1,1]$上的图象大致为（　　）

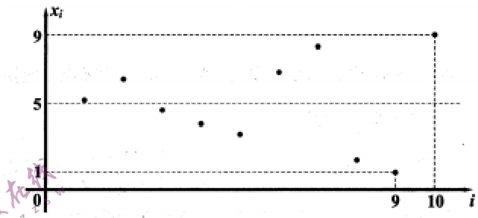

A


B


C


D

4. 如图，一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9,x_{10}$ 的平均数为5，方差为 s_1^2，去除 x_9,x_{10} 这两个数据后，平均数为 $\overline{x}$，方差为 s_2^2，则（　　）



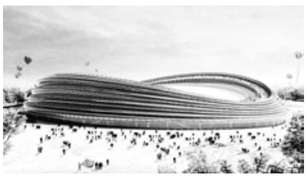
A. $\overline{x}>5,\ s_1^2>s_2^2$　　B. $\overline{x}<5,\ s_1^2<s_2^2$

C. $\overline{x}=5,\ s_1^2<s_2^2$　　D. $\overline{x}=5,\ s_1^2>s_2^2$

5. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足同向共线，且 $|\vec{b}|=2,|\vec{a}-\vec{b}|=1$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=$（　　）

A. 3　　B. 15　　C. -3 或15　　D. 3 或15

6. 国家速滑馆又称“冰丝带”，是北京 2022 年冬奥会的标志性场馆，拥有亚洲最大的全冰面设计，但整个系统的碳排放接近于零，做到真正的智慧场馆、绿色场馆，并且为了倡导绿色可循环的理念，场馆还配备了先进的污水、雨水过滤系统．已知过滤过程中废水的污染物数量 N(mg/L)与时间 t 的关系为 $N=N_0e^{-kt}$(N_0 为最初污染物数量)．如果前 4 小时消除了 20%的污染物，那么污染物消除至最初的 64%还需要（　　）



A．3.6 小时　　B．3.8 小时　　C．4 小时　　D．4.2 小时

7. 已知实数 a，b，c 满足 $\ln a=e^b=\frac{1}{c}$，则下列不等式中不可能成立的是（　　）

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

8. 已知一个球与一个圆台的上下底面和侧面都相切，若圆台的侧面积为16π，上、下底面的面积之比为$1:9$，则球的表面积为（　　）

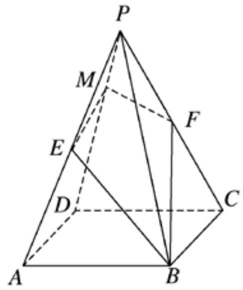
A. 12π　　B. 14π　　C. 16π　　D. 18π

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0, 0<\varphi<\pi)$ 的图像经过两点 $A(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\dfrac{\pi}{4},0)$，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{4})$ 内有且只有两个最值点，且最大值点大于最小值点，则 $\omega=$（　　）

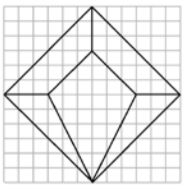
A. 8　　　　B. 9　　　　C. 10　　　　D. 11

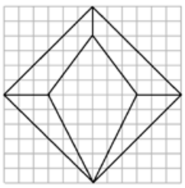
10. M 为圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点，则 M 到直线 $3x+4y-15=0$ 的距离大于 2 的概率为（　　）

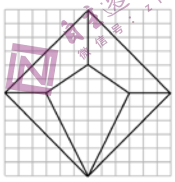
A. $\dfrac{1}{6}$　　　　B. $\dfrac{1}{3}$　　　　C. $\dfrac{2}{3}$　　　　D. $\dfrac{5}{6}$

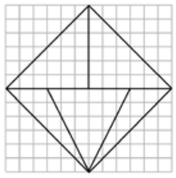


11. 如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 12，$AB=6\sqrt{2}$，E，F 分别为 PA，PC 的中点，过点 B，E，F 的截面交 PD 于点 M，截面 $EBFM$ 将四棱锥分成上、下两个部分，规定 $\overrightarrow{BD}$ 为正视图方向，则几何体 $CDABFME$ 的俯视图为（　　）


A


B


C


D

12. 在棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 中，点 P 为△ABC 所在平面内一动点，且满足 $|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，则 PD 的最大值为（　　）

A．3　　　　B. $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　　　　D．2

二．填空题：本题共 4 小题，每题 5 分共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+1\le 0 \\ x+y-1\ge 0 \\ y\le 3 \end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最小值为_________;

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2，前 n 项和为 S_n，且 $6, a_2, a_5$ 成等差数列，则 $S_5=$______;

15. “一湾如月弦初上，半壁澄波镜比明”描述的是敦煌八景之一的月牙泉．如图所示，月牙泉由两段在同一平面内的圆弧形岸连接围成．两岸连接点间距为 $60\sqrt{3}$ 米．其中外岸为半圆形，内岸圆弧所在圆的半径为 60 米．某游客绕着月牙泉的岸边步行一周，则该游客步行的路程为__________米;

16. 已知直线 $l: y=-1$，抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线交抛物线 C 于 A, B 两点，点 B 关于 y 轴对称的点为 P．若过点 A, B 的圆与直线 l 相切，且与直线 PB 交于点 Q，则当 $\overrightarrow{QB}=3\overrightarrow{PQ}$ 时，直线 AB 的斜率为________.

三．解答题：共 70 分.解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.第 17—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

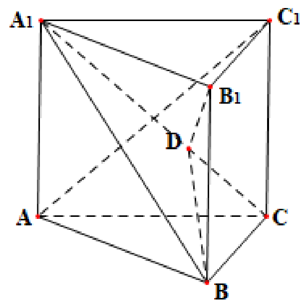
（一）必考题：共 60 分.

17.在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\dfrac{\sqrt{3}a}{1+\cos A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=\sqrt{3}, c-b=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，求 ΔABC 的面积.

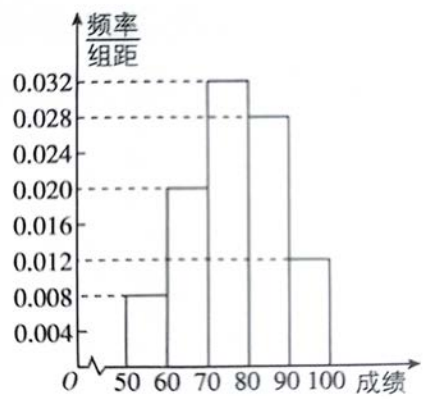
18. 如图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$\angle ACB=90^\circ$，$AC_1\perp A_1C$，D 为线段 A_1C 上的动点，$AC_1\perp BD$.



（1）求证：平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC；

（2）若 $AA_1\perp AC$，D 为线段 A_1C 的中点，$AC=2BC=2$，求 B_1D 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.

19.　为弘扬奥林匹克精神，普及冰雪运动知识，助力 2022 年冬奥会和冬残奥会，某校组织全体学生参与“激情冰雪—相约冬奥”冰雪运动知识竞赛. 从参加竞赛的学生中，随机抽取若干名学生的竞赛成绩，均在 50 到 100 之间，将样本数据分组为[50, 60)，[60, 70)，[70, 80)，[80, 90)，[90, 100]，并将成绩绘制得到如图所示的频率分布直方图. 已知成绩在区间 70 到 90 的有 60 人.



(1) 求样本容量，并估计该校本次竞赛成绩的中位数及平均数 $\overline{x}$（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）；

(2) 全校学生有 1000 人，抽取学生的竞赛成绩的标准差为 11，用频率估计概率，记全校学生的竞赛成绩的标准差为 σ，估计全校学生中竞赛成绩在 $\left(\overline{x}-\sigma,\overline{x}+\sigma\right)$ 内的人数.

20. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的右顶点为$A$，$O$为原点，点$P(1,1)$在$C$的渐近线上，$\Delta PAO$的面积为$\frac{1}{2}$.

（1）求C的方程；

（2）过点P作直线l交C于M,N两点，过点N作x轴的垂线交直线AM于点G，H为NG的中点，证明：直线AH的斜率为定值.

21. 已知函数$f(x)=e^x(1+a\ln x)$，其中$a>0$，设$f^{'}(x)$为$f(x)$的导函数.

（1）设$g(x)=e^{-x}f^{'}(x)$，若$g(x)\geq 2$恒成立，求实数a的取值范围；

（2）设函数$f(x)$的零点为x_0，函数$f^{'}(x)$的极小值点为x_1，当$a>2$时，求证：$x_0>x_1$.

（二）选考题：共 10 分.请考生在第 22，23 题中任选一题作答，如多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

22. 在极坐标系中，曲线C的极坐标方程$\rho=4a\cos\theta\ (a>0)$，在以极点O为原点，极轴为x轴正半轴的平面直角坐标系中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=3+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），直线$l$与曲线$C$交于$M,N$两点.

（1）求曲线C的参数方程与l的普通方程；

（2）若$S_{\Delta OMN}=2\sqrt{7}$，求实数a的值.

[选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

23. 已知函数$f(x)=|2x-4|+|x+4|$的最小值是m.

（1）求m；

（2）若正数a,b,c满足$a+b+c=m$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3\sqrt{2}$.