

北京一零一中 2019-2020 学年度第一学期高三数学统考一

一、选择题共 8 小题，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

01. 已知全集 $U=R$ ，集合 $A=\{x|2^x \geq 1\}$ ， $B=\{y|y=x^2+1\}$ 。则 $A \cap C_U B =$ 【 】

- A. $\{x|x \leq 0\}$ B. $\{x|x \geq 0\}$
- C. $\{x|x < 1\}$ D. $\{x|0 \leq x < 1\}$

02. 设 i 是虚数单位，则复数 $i^2 - \frac{2}{1+i}$ 的模为 【 】

- A. $\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{2}$
- C. $2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{5}$

03. 下列函数中为偶函数的是 【 】

- A. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ B. $f(x) = 1 - \cos x$
- C. $f(x) = -2^{-x}$ D. $f(x) = |\ln x|$

04. 已知 \vec{a}, \vec{b} 都是单位向量，则“ $\lambda = \pm 1$ ”是“ $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \perp (\lambda \vec{a} - \vec{b})$ ”的 【 】

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
- C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

05. 如图，表 n 是 $(2n-1) \times (2n-1)$ 的方阵，最外层数字是 $n-1$ ，由外而内每层数字递减 1，最中心数字为 0。表 1 的各数之和为 0，表 2 的各数之和为 8，表 3 的各数之和为 40，，则表 6 的各数之和为 【 】

- A. 420
- B. 440
- C. 460
- D. 480

0

表 1

1	1	1
1	0	1
1	1	1

表 2

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

表 3

06. 利克雷函数为 $F(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数时,} \\ 0, x \text{ 为无理数时,} \end{cases} (x \in R)$ 。有下列四个命题: ①此函数为偶函数, 且有无数条对称轴; ②此函数的值域是 $[0,1]$; ③此函数为周期函数, 但没有最小正周期; ④存在三点

$A(a, F(a)), B(b, F(b)), C(c, F(c))$, 使得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 以上命题正确的是 【 】

A. ①②

B. ①③

C. ③④

D. ②④

07. 已知 $y=f(x+2)$ 是奇函数, 若函数 $g(x) = f(x) - \frac{\sin 1}{x-2}$ 有 k 个不同的零点, 记为 x_1, x_2, \dots, x_k , 则

$x_1 + x_2 + \dots + x_k =$ 【 】

A. 0

B. k

C. $2k$

D. $4k$

08. 所谓声强, 是指声音在传播途径上每 1 平方米面积上的声能流密度, 用 I 表示。人类能听到的声强范围很广, 其中能听见的 1000Hz 声音的声强 (约 10^{-12}W/m^2) 做为标准声强, 记作 I_0 , 声强 I 与标准声强 I_0 之比

的常用对数称作声强的声强级, 记作 L , 即 $L = \lg \frac{I}{I_0}$, 声强级 L 的单位名称为贝(尔), 符号为 B , 取

贝(尔)的十分之一作为响度的常用单位, 称为分贝(尔), 简称分贝 (dB)。《三国演义》中有张飞喝断当阳桥的故事, 设张飞大喝一声的响度为 140dB , 一个士兵大喝一声的响度为 90dB , 如果一群士兵同时大喝一声相当于张飞大喝一声的响度, 那么这群士兵的人数为

A. 1 万

B. 2 万

C. 5 万

D. 10 万

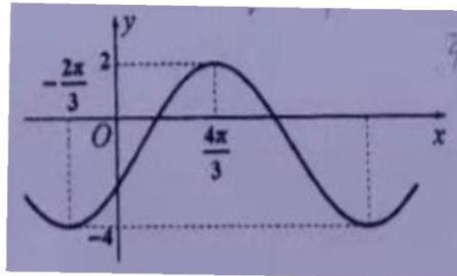
二、填空题共 6 小题.

09. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle B = 60^\circ$, 点 E, F 分别是边 AB, BC 的中点, 则 $\overline{AF} \cdot \overline{DE}$ 的值为 _____.

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 是单调递减的等比数列, 其 n 项和为 S_n , $S_2 = 3, a_3 = \frac{1}{4}$, 则 $\{a_n\}$ 的公比 $q =$ _____.

11. 已知函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如右图所示, 则 φ 的值为

_____.



12. 若关于 x 的方程 $x^3 - 3x^2 - a = 0$ 有三个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $f(a) = f(b)$ ($a \neq b$), 则函数 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{2}x + 5, & x \leq 0 \\ \frac{ax^2 + 2b}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的最小值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ \ln \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 则直线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为_____; 若关于 x 的方程

$f(x) + \frac{1}{e}x + a = 0$ 有三个不等实根, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (13 分) 以数列的任意相邻两项为坐标的点 $P_n(a_n, a_{n+1})$ 均在一次函数 $y = 2x + k$ 的图像上, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$b_n = a_{n+1} - a_n, \text{ 且 } b_1 \neq 0.$$

(1) 求证数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 并求出数列 $\{b_n\}$ 的公比;

(2) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 若 $S_6 = T_4, S_5 = -9$, 求 k 的值.

16. (13分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的所有零点.

17. (13分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是内角 A, B, C 的对边, $1 + \cos(A+B) = 2 \cos^2 C$

(1) 若 $2a = \sqrt{3}c$, 求 $\sin A$ 的值;

(2) 求 $\sin^2 A + \sin^2 B$ 的取值范围.

18. (14分) 已知函数 $f(x) = ax + \ln x$, 其中 a 为常数, 设 e 为自然对数的底数.

(1) 当 $a = -1$ 时, 求 $f(x)$ 过切点为 $(1, f(1))$ 的切线方程;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(0, e]$ 上的最大值为 -3 , 求 a 的值;

(3) 若不等式 $f(x) \leq x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

19. (14分) 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和值域;

(2) 设 $a \geq 1$, 函数 $g(x) = x^3 - 3a^2x - 2a$, $x \in [0, 1]$, 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$, 总存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得

$g(x_0) = f(x_1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (13分) 设 S 为有限集合, $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$ 为 S 的子集, $|X|$ 表示集合 X 中元素的个数, 已知对于每个正整数 $i (1 \leq i \leq 2019)$, 都有 $|A_i| \geq \frac{1}{5}|S|$.

(1) 记 $S_{(m)}$ 为元素个数为 m 的集合, 当 $m=3$ 时, 求集合 $S_{(m)}$ 的所有子集的个数;

(2) 若一定有集合 S 中的某个元素在至少 k 个集合中 A_i 出现, 则 k 最大值是多少? 并加以证明.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。



微信扫一扫，快速关注