

绵阳市高中 2020 级第三次诊断性考试 理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

CBDAC AADCB BA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 3 14. 2 15. 1 16. $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）抽取的 3 个销售终端中至少有 2 个销售终端的年销售额超过 40 万元的概率

$$P = \frac{C_4^2 C_{16}^1 + C_4^3}{C_{20}^3} = \frac{5}{57}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

（2）由样本估计总体，从全国随机抽取 1 个销售终端，春季新款的年销售额超过 40 万元的概率是 $\frac{1}{5}$ ，随机变量 $\xi \sim B(3, \frac{1}{5})$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$P(\xi = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{125}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(\xi = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{64}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{1}{125}$

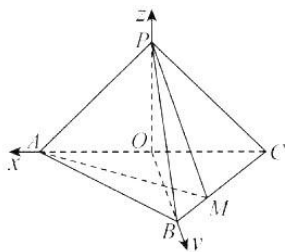
$\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\therefore \xi \text{ 的期望为: } E(\xi) = np = \frac{3}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：（1）证明：取 AC 的中点为 O，连接 BO，PO.

$\because PA=PC, \therefore PO \perp AC$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because PA=PC=2\sqrt{2}, AC=4,$
 $\therefore \angle APC=90^\circ,$ 2分
 $\therefore PO=\frac{1}{2}AC=2,$ 同理 $BO=2.$ 3分
 又 $PB=2\sqrt{2},$ 可得 $PO^2+OB^2=PB^2,$ 即 $PO\perp OB.$ 4分
 $\because AC\cap OB=O, AC, OB\subset$ 平面 $ABC,$
 $\therefore PO\perp$ 平面 $ABC.$ 5分
 又 $PO\subset$ 平面 $PAC,$
 \therefore 平面 $PAC\perp$ 平面 $ABC.$ 6分
 (2) $\because PO\perp$ 平面 $ABC, OB\perp AC,$ 则 $PO\perp OB.$
 又 $PO\perp OC,$ 建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz,$
 则 $A(2,0,0), B(0,2,0), C(-2,0,0), P(0,0,2), M(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},0),$ 7分



$\therefore \vec{AP}=(-2,0,2), \vec{AB}=(-2,2,0).$
 设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z),$
 由 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{AP}=0, \\ \vec{n}\cdot\vec{AB}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -2x+2z=0, \\ -2x+2y=0, \end{cases}$ 令 $x=1,$ 得 $\vec{n}=(1, 1, 1),$ 9分
 同理, 平面 APM 的法向量为 $\vec{m}=(1, 2, 1),$ 10分
 $\therefore \cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}}|=\frac{2\sqrt{2}}{3},$ 11分
 \therefore 二面角余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$ 12分

19. 解: (1) 由 $S_n = \log_{\sqrt{3}}(T_n),$ 令 $n=1,$
 得 $a_1 = S_1 = \log_{\sqrt{3}}(T_1) = \log_{\sqrt{3}}(b_1) = \log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = -2,$ 即 $a_1 = -2,$ 2分

又 $\because a_4 = a_1 + 3d = 4,$

\therefore 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2, a_n = 2n - 4, \dots$ 4 分

$\therefore S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n^2 - 3n, \dots$ 5 分

$\therefore T_n = (\sqrt{3})^{n^2 - 3n}, \dots$ 6 分

(2) 当 $n \geq 2$ 时, $T_{n-1} = (\sqrt{3})^{(n-1)^2 - 3(n-1)} = (\sqrt{3})^{n^2 - 5n + 4}, \dots$ 7 分

\therefore 当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = (\sqrt{3})^{2n-4} = 3^{n-2}, \dots$ 8 分

当 $n = 1$ 时, $b_1 = \frac{1}{3}$ 也满足上式, 所以 $b_n = 3^{n-2} (n \in \mathbb{N}^*), \dots$ 9 分

$\therefore c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-4}{3^{n-2}},$

要使 $c_{n-1} = c_n + c_{n+1}$ 成立, 即 $\frac{2n-6}{3^{n-3}} = \frac{2n-4}{3^{n-2}} + \frac{2n-2}{3^{n-1}}, \dots$ 10 分

解得 $n=4, \dots$ 11 分

$\therefore c_3 = \frac{2}{3}, c_4 = \frac{4}{9}, c_5 = \frac{2}{9},$ 满足: c_4 为 c_3, c_5 的等差中项,

\therefore 存在 $n=4$ 符合题意. \dots 12 分

20. 解: (1) $f'(x) = \frac{2x^2 - ax + 1}{x}, \dots$ 1 分

$\because f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上即有极大值又有极小值,

所以方程 $2x^2 - ax + 1 = 0$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上有两不等实根, \dots 2 分

令 $g(x) = 2x^2 - ax + 1,$ 则 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 8 > 0 \\ \frac{1}{2} < \frac{a}{4} < 2 \\ g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{a}{2} > 0 \\ g(2) = 9 - 2a > 0 \end{cases}, \dots$ 3 分

解得: $2\sqrt{2} < a < 3,$

所以实数 a 的取值范围为: $2\sqrt{2} < a < 3. \dots$ 5 分

(2) 设切点为 (x_0, y_0) , 其中 $x_0 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则由题意可得:

$$\begin{cases} \frac{2x_0^2 - ax_0 + 1}{x_0} = 1, \\ x_0 - a = \ln x_0 + x_0^2 - ax_0, \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

整理得: $a = 2x_0 + \frac{1}{x_0} - 1$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

$$\therefore \ln x_0 - x_0^2 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} - 2 = 0, \quad (*)$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x^2 + 2x + \frac{1}{x} - 2 \quad (x > \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{-(x-1)(2x^2-1)}{x^2}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

由 $2x^2 - 1 > 0$,

易知: $h(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

$\therefore h(x) \leq h(1) = 0$, 所以方程 $(*)$ 只有唯一解: $x_0 = 1$, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

所以: $a = 2$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. 解: (1) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 $l: y = x - 2$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

$$\text{联立方程 } \begin{cases} x = y + 2 \\ y^2 = 2px \end{cases}, \text{ 整理得: } y^2 - 2py - 4p = 0, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{由韦达定理: } \begin{cases} y_1 + y_2 = 2p \\ y_1 y_2 = -4p \end{cases}, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\begin{aligned} |MN| &= \sqrt{1+t^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} \\ &= \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{4p^2 + 16p} = 3\sqrt{2}, \dots\dots\dots 4 \text{分} \end{aligned}$$

解得: $p = \frac{1}{2}$, 故抛物线的方程为: $y^2 = x$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 方法一: 设 $y_1 = a$, 则 $M(a^2, a)$,

$$\text{联立直线 } MN \text{ 与抛物线 } C \text{ 方程可得: } \begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = x \end{cases}, \text{ 整理得: } y^2 - ty - 2 = 0;$$

由韦达定理: $y_1 y_2 = -2$, 则 $y_2 = \frac{-2}{y_1}$; 7分

联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得: $\begin{cases} x = ny + 3 \\ y^2 = x \end{cases}$, 整理得: $y^2 - ny - 3 = 0$,

由韦达定理: $y_1 y_3 = -3$, 则 $y_3 = \frac{-3}{y_1}$ 8分

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle PMN} &= S_{\triangle PNM} + S_{\triangle PMN} = \frac{y_1 - y_2}{y_1} S_{\triangle PNM} \\ &= \frac{(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)}{2y_1} = \frac{1}{2} \left(y_1 + \frac{5}{y_1} + \frac{6}{y_1^3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{6}{a^3} + \frac{5}{a} + a \right) \dots\dots\dots 10分 \end{aligned}$$

令 $h(a) = \frac{6}{a^3} + \frac{5}{a} + a$,

$$\begin{aligned} \therefore h'(a) &= \frac{a^4 - 5a^2 - 18}{a^4} = \frac{(a^2 - \frac{5 + \sqrt{97}}{2})(a^2 + \frac{\sqrt{97} - 5}{2})}{a^4} \\ &= \frac{(a^2 + \frac{\sqrt{97} - 5}{2})(a + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}})(a - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}})}{a^4} \end{aligned}$$

由 $h'(a) > 0$ 解得: $a > \sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}}$, 由 $h'(a) < 0$ 解得: $0 < a < \sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}}$,

$\therefore h(a)$ 在区间 $(0, \sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}})$ 单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{97}}{2}}, +\infty)$ 单调递增, 11分

\therefore 当 $a^2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{2}$ 时, $h(a)$ 取得最小值. 故 M 的横坐标为 $\frac{5 + \sqrt{97}}{2}$ 12分

(2) 方法二: 延长 PN 交 x 轴于点 Q ,

设 $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, 0)$, $y_1 = a$, 则 $M(a^2, a)$,

联立直线 MN 与抛物线 C 方程可得: $\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = x \end{cases}$,

整理得: $y^2 - ty - 2 = 0$,

由韦达定理: $y_1 y_2 = -2$, 则 $y_2 = \frac{-2}{a}$, 故 $N(\frac{4}{a^2}, -\frac{2}{a})$, 7分

联立直线 MP 与抛物线 C 方程可得: $\begin{cases} x = my + 3 \\ y^2 = x \end{cases}$, 整理得: $y^2 - ny - 3 = 0$,

由韦达定理: $y_1 y_3 = -3$, 则 $y_3 = \frac{-3}{a}$, 故 $P(\frac{9}{a^2}, -\frac{3}{a})$, 9 分

$\therefore Q, N, P$ 三点共线,

故 $k_{QN} = k_{NP}$, 代入得: $\frac{\frac{2}{a} - \frac{1}{a^2}}{x_4 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}{-\frac{6}{a^2}}$, 解得: $x_4 = -\frac{6}{a^2}$,

$\therefore \overline{QN} = (\frac{10}{a^2}, -\frac{2}{a})$, $\overline{QP} = (\frac{15}{a^2}, -\frac{3}{a})$, 即 $\overline{QN} = \frac{2}{3}\overline{QP}$, 故 $\overline{NP} = \frac{1}{3}\overline{QP}$,

则 $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{3}S_{\triangle MQP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |QB| \cdot |y_1 - y_3| = \frac{1}{6} (3 + \frac{6}{a^2})(a + \frac{3}{a}) = \frac{1}{2} (\frac{6}{a^3} + \frac{5}{a} + a)$, 10 分

令 $h(a) = \frac{6}{a^3} + \frac{5}{a} + a$, 则 $h'(a) = \frac{a^4 - 5a^2 - 18}{a^4}$,

当 $a^2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{2}$ 时, $h(a)$ 取得最小值, 11 分

故 M 的横坐标为 $\frac{5 + \sqrt{97}}{2}$ 12 分

22. 解: (1) 可得圆 C 的标准方程为: $(x-2)^2 + y^2 = 4$,

\therefore 圆 C 是以 $C(2, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆, 2 分

\therefore 圆 C 的参数方程为: $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 5 分

(2) $\because |AB| = 2\sqrt{2}$, 可得 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, 6 分

不妨设点 A 所对应的参数为 α , 则点 B 所对应的参数为 $\alpha + \frac{\pi}{2}$,

$\therefore A(2 + 2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, 则 $B(2 + 2\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}), 2\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))$,

即 $B(2 - 2\sin\alpha, 2\cos\alpha)$, 7 分

$\therefore \begin{cases} x_1 = 2 + 2\cos\alpha \\ y_1 = 2\sin\alpha \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 2 - 2\sin\alpha \\ y_2 = 2\cos\alpha \end{cases}$,

$\therefore x_1 x_2 + y_1 y_2 = (2 + 2\cos\alpha) \cdot (2 - 2\sin\alpha) + 2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha$ 8 分

$$= 4 + 4(\cos\alpha - \sin\alpha) = 4 + 4\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because \alpha \in [0, 2\pi], \text{ 则 } \alpha + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right],$$

$$\therefore \text{当 } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ 即 } \alpha = \frac{7\pi}{4} \text{ 时, } x_1y_1 + x_2y_2 \text{ 的最大值为 } 4 + 4\sqrt{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解: (1) 由 $a=1$, 则 $2b+3c=3$,

$$\text{由柯西不等式, 得 } (2b+3c)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \geq (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}, \text{ 当且仅当 } b = \frac{9}{10}, c = \frac{2}{5} \text{ 时等号成立. } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \because a+2b+3c=4, \text{ 即 } 2b+3c=4-a,$$

$$\text{又 } \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2, \text{ 则 } \sqrt{b} + \sqrt{c} = 2 - \sqrt{a}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又由 (1) 可知: } (2b+3c)\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \geq (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore (4-a)\frac{5}{6} \geq (2 - \sqrt{a})^2, \text{ 即 } 11a - 24\sqrt{a} + 4 \leq 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \sqrt{a} = t, \text{ 所以 } 11t^2 - 24t + 4 \leq 0,$$

$$\text{解得: } \frac{2}{11} \leq t \leq 2, \text{ 即 } \frac{4}{121} \leq a \leq 4, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } 2b+3c=4-a, \text{ 且 } b>0, c>0,$$

$$\therefore 4-a>0, \text{ 即 } a<4,$$

$$\text{综上所述, 可得 } \frac{4}{121} \leq a < 4. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

@高考直通车
高中各科试题免费下载

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

