苏州市 2022~2023 学年第一学期学业质量阳光指标调研卷

高三数学

注意事项：

学生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求：

1．本卷共 6 页，包含单项选择题（第 1 题~第 8 题）、多项选择题（第 9 题~第 12 题）、填空题（第 13 题~第 16 题）、解答题（第 17 题~第 22 题）.本卷满分 150 分，答题时间为 120 分钟.答题结束后，请将答题卡交回.

2．答题前，请您务必将自己的姓名、调研序列号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡的规定位置.

3．请在答题卡上按照顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效.作答必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔，请注意字体工整，笔迹清楚.

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x<0,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{0,b\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则实数 b 的值为

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】C

【解析】$A=\{1\},A\cap B\neq\varnothing$，则 $b=1$，选 C.

2．已知 $\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$（$x,y\in\mathbf{R}$，$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 $\sqrt{x^2+y^2}=$

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt5}{5}$　　C．$\sqrt3$　　D．$\sqrt5$

【答案】B

【解析】$\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$，$\dfrac{|\mathrm{i}|}{|2-\mathrm{i}|}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\therefore\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{\sqrt5}{5}$，选 B.

3．设$a=\sqrt{\pi}$，$b=\frac{5}{2}$，$c=\log_2 6$，则

A．$a<b<c$　　B．$b<a<c$　　C．$b<c<a$　　D．$c<a<b$

【答案】A

【解析】$a=\sqrt{\pi}<2$，$b>2$，$c>2$，a最小，$b^2>2^5$，$\therefore b>2^{\frac{5}{2}}$，

$\log_2 b>\frac{5}{2}$，$\therefore c>b>a$，选A..

4．已知通过某种圆筒型保温层的热流量$\Phi=\frac{2\pi\lambda l(t_1-t_2)}{\ln r_2-\ln r_1}$，其中$r_1,r_2$分别为保温层的内外半径（单位：mm），$t_1,t_2$分别为保温层内外表面的温度（单位：℃），$l$为保温层的长度（单位：m），$\lambda$为保温层的导热系数（单位：$\mathrm{W}/(\mathrm{m}\cdot{}^\circ\mathrm{C})$）.某电厂为了减少热损失，准备在直径为120mm、外壁面温度为250℃的蒸汽管道外表面覆盖这种保温层，根据安全操作规定，保温层外表面温度应控制为50℃.经测试，当保温层的厚度为30mm时，每米长管道的热损失$\frac{\Phi}{l}$为300W.若要使每米长管道的热损失$\frac{\Phi}{l}$不超过150W，则覆盖的保温层厚度至少为

A．60 mm　　B．65 mm　　C．70 mm　　D．75 mm

【答案】D

【解析】$\frac{\Phi}{l}=\frac{2\pi l(t_1-t_2)}{\ln r_2-\ln r_1}$，$r_1=60,r_2=90$，$t_1=250,t_2=50$时，

$300=\frac{2\pi\lambda\cdot 200}{\ln\frac{3}{2}}=\frac{400\pi\lambda}{\ln\frac{3}{2}}$，$\therefore \pi\lambda=\frac{3\ln\frac{3}{2}}{4}$，$\frac{\Phi}{l}\le 150$

$\therefore \frac{2\pi\lambda(250-50)}{\ln r_2-\ln 60}\le 150$，$2\ln\frac{3}{2}\le\ln\frac{r_2}{60}$，$\frac{9}{4}\le\frac{r_2}{60}$，$\therefore r_2\ge 135$，$135-60=75$，选D.

5．若$\left(\frac{a}{x}+bx\right)^6$的展开式中$x^2$的系数为60，则$a^2+b^2$的最小值为

A．2　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．3　　D．5

【答案】C

【解析】 $\left(\frac{a}{x}+bx\right)^6$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{a}{x}\right)^{6-r}(bx)^r$

$=C_6^r a^{6-r}b^r x^{r-b}x^r=C_6^r a^{6-r}b^r x^{2r-6}$，求 x^2 的系数，令 $r=4$，$C_6^4a^2b^4=60$，

$\therefore a^2b^4=4$，$a^2=\frac{4}{b^4}$，$a^2+b^2=\frac{4}{b^4}+b^2$，$f(x)=\frac{4}{x^4}+x^2$，

$f'(x)=\frac{-16}{x^5}+2x=0$，$x=\sqrt{2}$，$f(x)_{\min}=f(\sqrt{2})=\frac{4}{4}+2=3$，选 C.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左顶点为 A，右焦点为 F，过点 F 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 Q.若 $|OQ|,|QF|,|OA|$ 成等差数列，则 C 的离心率为

A．$\sqrt{2}$　　　　B．$\frac{3}{2}$　　　　C．2　　　　D．$\sqrt{5}$

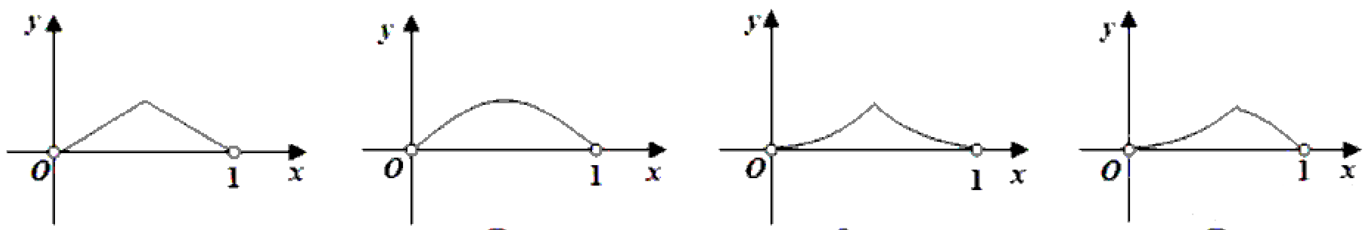
【答案】B

【解析】 过 $F(-c,0)$ 作 $y=-\frac{b}{a}x$ 的垂线，垂足为 P，则 $P\left(-\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，$\therefore Q\left(-\frac{a^2}{c},0\right)$.

$OQ=\frac{a^2}{c}$，$QF=c-\frac{a^2}{c}=\frac{b^2}{c}$，$OA=a$，$|OQ|,|QF|,|OA|$ 成等差数列，

$2\frac{b^2}{c}=\frac{a^2}{c}+a$，$2b^2=a^2+ac$，即 $2c^2-2a^2=a^2+ac$，$\therefore e=\frac{3}{2}$，选 B.

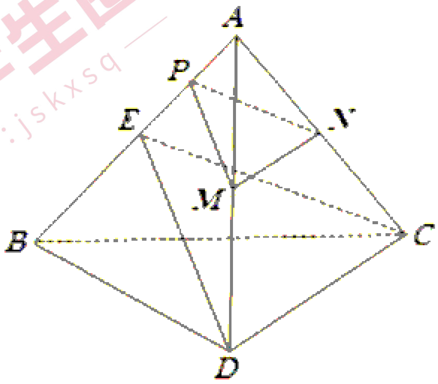
7．已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为1，P 为棱 AB 上的动点（端点 A,B 除外），过点 P 作平面 α 垂直于 AB，α 与正四面体的表面相交.记 $AP=x$，将交线围成的图形面积 S 表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $S=f(x)$ 的图象大致为



A　　　　B　　　　C　　　　D

【答案】C

【解析】如图取AB中点E，则$CE\perp AB$，$DE\perp AB$，$AB\perp$平面CDE，$AB\perp$平面α



则平面CDE // 平面α或平面CDE与平面α重合，$0<x<\frac{1}{2}$时，平面α为平面PMN，

$\triangle PMN \backsim \triangle ECD$，$\frac{PM}{ED}=\frac{x}{\frac{1}{2}}$，设$S_{\Delta PMN}=S_1$，$\frac{S_1}{S_{\Delta ECD}}=\frac{x^2}{\frac{1}{4}}=4x^2$，$\therefore S_1=4x^2\cdot S_{\Delta ECD}$，

二次函数单调递增，图象关于$x=\frac{1}{2}$对称的试卷分享 Q 群：704398182 选 C.

8．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数.记函数 $g(x)=2f(2x+1)+1$ ，则 $\sum_{k=1}^{31} g\left(\frac{k}{2}\right)=$

A．25　　　　B．27　　　　C．29　　　　D．31

【答案】D

【解析】方法一：　　　　知 $g(x)=1$ ，

则 $\sum_{k=1}^{31} g\left(\frac{k}{2}\right)=31$ ，(一步结束).

方法二：$f(x+1)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称. $f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，$f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$ 满足条件，$g(x)=2\cos\frac{\pi}{2}(2x+1)+1=2\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=-2\sin\pi x+1$ ，$T=2$ ，$g\left(\frac{1}{2}\right)+g(1)+g\left(\frac{3}{2}\right)+g(2)=-1+1+3+1=4$ ，

$\therefore \sum_{k=1}^{28} g\left(\frac{k}{2}\right)=7\times 4=28$ ，$\sum_{k=1}^{31} g\left(\frac{k}{2}\right)=28-1+1+3=31$ ，选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$ ，$|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1$ ，则与向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角的向量有

A．$\boldsymbol{b}$　　　　B．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　　　C．$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$　　　　D．$\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$

【答案】BC

【解析】$\vec{b}(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=2\times1\times\frac{1}{2}-1=0$ ，夹角为直角，A 错.

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=3>0$ ，夹角为锐角，B 对.

$(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=4-3\times1+2=3>0$ ，夹角为锐角，C 对.

$(\vec{b}-2\vec{a})(\vec{a}-\vec{b})=3\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}^2-2\vec{a}^2=3-1-8<0$ ，夹角为钝角，D 错.

选 BC.

10．已知函数 $f(x)=\sin x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+x$，则

A． $f(x)$ 的周期为 2π

B．直线 $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

C． $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

D．点 $\left(-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

【答案】BCD

【解析】 $y=x$ 不是周期函数，则 $f(x)$ 不是周期函数，A 错.

$f(x)=\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x+x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+x$， $f'(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1=\dfrac{3}{2}$，

$x=0$，切点 $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，切线 $y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}x$ 即 $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，B 对.

$f'(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1\geq 0$， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上 $\nearrow$，C 对.

$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+f(x)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}-x\right)-\dfrac{2}{3}\pi-x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+x=-\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore f(x)$ 关于 $\left(-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 对称，D 对，选 BCD.

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{CC_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则下列说法中正确的有

A．若 $PQ\subset$ 平面 AB_1C，则 $\lambda+\mu=\dfrac{1}{3}$

B．若 $PQ\,//$ 平面 $ABCD$，则 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$

C．存在 λ,μ，使得 $|PQ|=\dfrac{3}{5}$

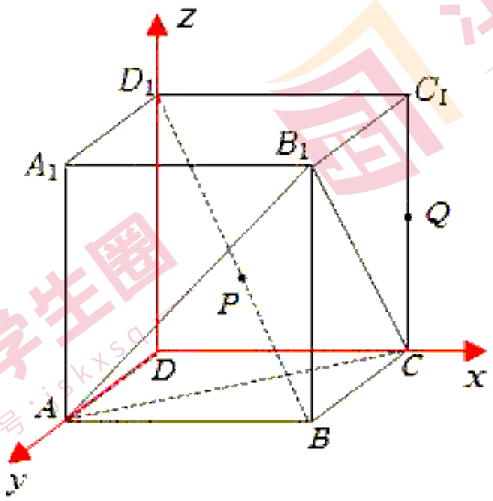
D．存在 λ，使得对于任意的 μ，都有 $PQ\perp BD$

【答案】AD

【解析】方法一：$PQ \subset$ 平面 AB_1C，则 $\mu=0,\lambda=\frac{1}{3},\lambda+\mu=\frac{1}{3}$，A 对.

$\lambda=\mu=1$ 时，PQ // 平面 $ABCD$，B 错.

如图建系，$B(1,1,0),D_1(0,0,1)$，



$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，$\therefore P(1-\lambda,1-\lambda,\lambda)$，$\overrightarrow{CQ}=\mu\overrightarrow{CC_1}$，$\therefore Q(0,1,\mu)$，

$\therefore PQ=\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2+(\lambda-\mu)^2}\geq\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$，

而 $\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore PQ$ 取不到 $\frac{3}{5}$，C 错，选 AD.

对于 D，$\overrightarrow{PQ}=(\lambda-1,\lambda,\mu-\lambda)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}=1-\lambda-\lambda=1-2\lambda=0$，

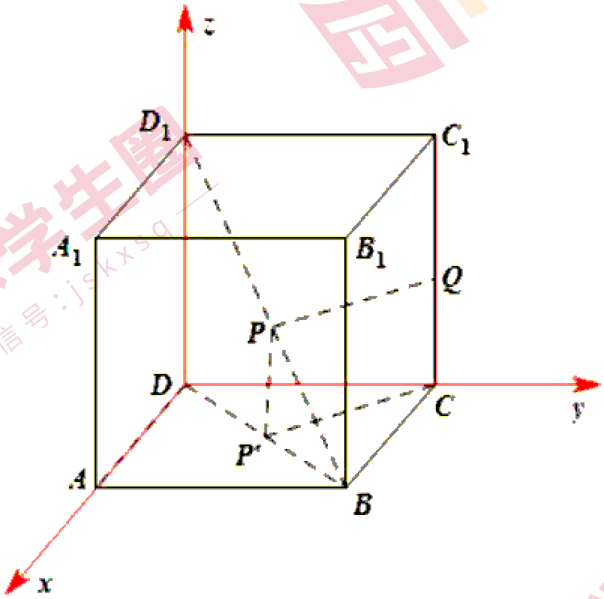
$\lambda=\frac{1}{2}$，$\forall\mu,\exists\lambda=\frac{1}{2}$ 使得 $PQ\perp BD$，D 对.

方法二：如图建系，$\therefore B(1,1,0),D_1(0,0,1)$，$\therefore P(1-\lambda,1-\lambda,\lambda)$，$Q(0,1,\mu)$，$D(0,0,0)$，

$\overrightarrow{PQ}=(\lambda-1,\lambda,\mu-\lambda)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，

当 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BD}$ 时，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}=1-\lambda-\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 存在 $\lambda=\frac{1}{2}$ 对任意的 μ，

有 $PQ\perp BD$，D 正确.



对于 D，**法三：** PQ 在底面的射影为 $P'C$ ，要使 $PQ\perp BD$ ，由三垂线定理，

只需 $P'C\perp BD$ ，其中 $P'\in BD$ ，故只需取 BD 中点 P' 即可使 $CP'\perp BD$ ，$\therefore PQ\perp BD$ ，

即存在 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 对任意的 μ 有 $PQ\perp BD$ ，D 正确.

12．中国蹴鞠已有两千三百多年的历史，于2004年被国际足联正式确认为世界足球运动的起源.蹴鞠在2022年卡塔尔世界杯上再次成为文化交流的媒介，走到世界舞台的中央，诉说中国传统非遗故事.为弘扬中华传统文化，我市四所高中各自组建了蹴鞠队（分别记为“甲队”“乙队”“丙队”“丁队”）进行单循环比赛（即每支球队都要跟其他各支球队进行一场比赛），最后按各队的积分排列名次（积分多者名次靠前，积分同者名次并列），积分规则为每队胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分.若每场比赛中两队胜、平、负的概率都为$\frac{1}{3}$，则在比赛结束时

A．四支球队的积分总和可能为15分

B．甲队胜3场且乙队胜1场的概率为$\frac{2}{3^5}$

C．可能会出现三支球队积分相同且和第四支球队积分不同的情况

D．丙队在输了第一场的情况下，其积分仍超过其余三支球队的积分的概率为$\frac{8}{3^5}$

【答案】ACD

【解析】四支球队的积分可能为15分，如甲乙比，甲丙比，甲丁比都是甲胜共9分，剩余3场比赛都是平共6分，A对，C对.

甲胜三场乙胜一场的概率$\left(\frac{1}{3}\right)^3 C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3^5}$，B错.

对于D，**法一：**

丙队在输了第一场的情况下，其积分仍超过其余三支球队的积分，则另两场丙队必须全赢.

第一步：丙队另两场全赢的概率$P_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2$；

第二步：另三个球队，第一场赢了的球队不能继续赢了，有几种情形：

①第一场赢的球队，另两场平概率为$\left(\frac{1}{3}\right)^2$；②第一场赢了的球队可能连输2场，另两个球队

平概率$\left(\frac{1}{3}\right)^3$；③第一场赢了的球队平一场负一场另两个球队平或还未胜的球队胜概率为

$C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)$

$P=\left(\frac{1}{3}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}C_2^1\cdot\frac{1}{3}\right]=\frac{8}{3^5}$，D 正确.

对于 D，**法二**，丙甲；丙乙；丙丁；甲乙；甲丁；乙丁

$0+3,3+0,3+0$，不妨设丙第一场输给甲，接下来丙的两场分为：

①丙均赢，（丙积6分），接下来甲的两场都不可能赢（否则积分≥ 6）

（i）若甲接下来两场输一场，平一场，$P_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot C_2^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3^5}$；

（ii）若接下来两场甲输两场，$P_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3^5}$；

（iii）若接下来两场甲平两场 $P_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3^4}$；

②接下来丙的两场丙赢一场，平一场，　　　　　　　　　　　　经分析不可能

$\therefore$所求概率 $P=\frac{4}{3^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^4}=\frac{8}{3^5}$，D 正确.

选 ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知圆台的上、下底面半径分别为4和5，高为2，则该圆台的侧面积为__________.

【答案】$9\sqrt{5}\pi$

【解析】母线长$l=\sqrt{5}$，$S_{侧}=\pi(4+5)\sqrt{5}=9\sqrt{5}\pi$.

14．在平面直角坐标系xOy中，已知圆$C:(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$，过点$M(0,-1)$的直线$l$交$C$于$A,B$两点，且$|MA|=|AB|$，请写出一条满足上述条件的$l$的方程：__________.

【答案】$x=0$或$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-1$

【解析】当AB的斜率不存在时$A(0,1),B(0,3)$满足$MA=AB$，此时直线：$x=0$.

当AB的斜率存在时，设$AB:y=kx-1$即$kx-y-1=0$，$MA\cdot MB=MC^2-r^2$，

$AB\cdot 2AB=12-4=8$，$\therefore AB=2$，$\therefore C$到AB的距离为$\sqrt{3}$，

$\therefore \dfrac{|\sqrt{3}k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$，$\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore l:x=0$或$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-1$.

15．记函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$T$，给出下列三个命题：

甲：$T>3$；

乙：$f(x)$在区间$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$上单调递减；

丙：$f(x)$在区间$(0,3)$上恰有三个极值点.

若这三个命题中有且仅有一个假命题，则假命题是________（填“甲”、“乙”或“丙”）；ω的取值范围是________.

【答案】甲；$\left(\dfrac{7\pi}{9},\dfrac{10}{9}\pi\right]$

【解析】若丙为真命题：$0<x<3$，$\dfrac{\pi}{6}<\omega x+\dfrac{\pi}{6}<3\omega+\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)$在$(0,3)$恰有3个极值点，

则$\dfrac{5}{2}\pi<3\omega+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{7}{2}\pi$，$\therefore \dfrac{7\pi}{9}<\omega\le\dfrac{10}{9}\pi$.

若乙为真命题，$\dfrac{1}{2}<x<1$，$\dfrac{1}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}<\omega x+\dfrac{\pi}{6}<\omega+\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{2},1\right)\searrow$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{1}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}\ge\dfrac{\pi}{2}\\ \omega+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{3}{2}\pi\end{cases}$，$\therefore \dfrac{2\pi}{3}\le\omega\le\dfrac{4\pi}{3}$.

若甲为真命题，$\dfrac{2\pi}{\omega}>3$，则$\omega<\dfrac{2\pi}{3}$.

有且仅有一个假命题，则甲为假命题且$\dfrac{7\pi}{9}<\omega\le\dfrac{10}{9}\pi$.

16．若对任意$m,n\in\mathbf{R}$，关于x的不等式$m-n\le(x-m)^2+\mathrm{e}^{x-n}-a$恒成立，则实数$a$的最大值为_________.

【答案】$\dfrac{3}{4}$

【解析】方法一：

$m-x+x-n\le(m-x)^2+\mathrm{e}^{x-n}-a$，令$\begin{cases}m-x=s\\x-n=t\end{cases}$，

则$a\le s^2-s+\mathrm{e}^t-t$，$a\le\dfrac{3}{4}$.

注：$\mathrm{e}^t\ge t+1$，则$\mathrm{e}^t-t\ge1$.

方法二：$a\le[(x-m)^2-m+\mathrm{e}^{x-n}+n]_{\min}$，而$(x-m)^2-m+\mathrm{e}^{x-n}+n$

$=m^2-(2x+1)m+x^2+\mathrm{e}^{x-n}+n\ge\dfrac{4x^2-(2x+1)^2}{4}+x-n+1+n=\dfrac{-4x-1}{4}+x+1=\dfrac{3}{4}$，

当且仅当$\begin{cases}m=\dfrac{2x+1}{2}\\n=x\end{cases}$时取“=”，$\therefore a\le\dfrac{3}{4}$，$a$的最大值为$\dfrac{3}{4}$.

方法三：$m-x+x-n\le(x-m)^2+\mathrm{e}^{x-n}-a$，

$a\le(x-m)^2+(x-m)+\mathrm{e}^{x-n}-(x-n)$，

$y=(x-m)^2+(x-m)_{\min}=-\dfrac{1}{4}$，当且仅当$x-m=-\dfrac{1}{2}$时取“=”，

$y=\mathrm{e}^{x-n}-(x-n)_{\min}=1$，当且仅当$x-n=1$时取“=”，

$\therefore(x-m)^2+(x-m)+\mathrm{e}^{x-n}-(x-n)_{\min}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore a\le\dfrac{3}{4}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10分）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b+\sqrt{2}a\cos B=2$，$c=\sqrt{2}$.

（1）求A；

（2）若$\tan C=2$，点D在边BC上，$\angle ADB=2\angle ABC$，求AD.

【解析】解析一：

（1）$\because b+\sqrt{2}a\cos B=2$，$\therefore b+\sqrt{2}a\cos B=\sqrt{2}c$，

$\therefore \sin B+\sqrt{2}\sin A\cos B=\sqrt{2}\sin C=\sqrt{2}\sin(A+B)=\sqrt{2}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

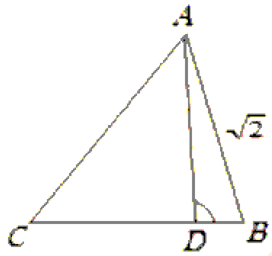
$\Rightarrow \sin B=\sqrt{2}\cos A\sin B$，$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$.

（2）$\tan B=-\tan(A+C)=-\dfrac{1+2}{1-2}=3$，$\sin B=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，

$\tan\angle ADB=\tan 2\angle ABC=\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}=\dfrac{6}{1-9}=-\dfrac{3}{4}$，

$\therefore \sin\angle ADB=\dfrac{3}{5}$，

在$\triangle ABD$中，由正弦定理$\Rightarrow \dfrac{AD}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{3}{5}}$，$\therefore AD=\sqrt{5}$.



解析二：

（1）由余弦定理，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+2-b^2}{2\sqrt{2}a}$，

代入$b+\sqrt{2}a\cos B=2$，得$a^2-b^2+2b=2$，

所以$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+2-a^2}{2\sqrt{2}b}=\dfrac{2b}{2\sqrt{2}b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{4}$.

（2）因为$\tan C=2$，所以$\sin C=2\cos C>0$，

又因为$\sin^2 C+\cos^2 C=1$，所以$\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

法一：因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\cos B=-\cos(A+C)=-(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$

$$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

因为 $\angle ADB=2\angle ABC$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin 2B=2\sin B\cos B=2\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{3}{5}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，得 $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{10AD}{3\sqrt{10}}$，

所以 $AD=\sqrt{5}$.

法二：因为 $A+B+C=\pi$，$\tan C=2$，

所以 $\tan B=-\tan(A+C)=-\tan\left(C+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\tan C+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan C\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{2+1}{1-2\times 1}=3$，

所以 $\sin\angle ADB=\sin 2B=\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin^2 B+\cos^2 B}=\dfrac{2\tan B}{1+\tan^2 B}=\dfrac{6}{1+9}=\dfrac{3}{5}$，

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，得 $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{10AD}{3\sqrt{10}}$，

所以 $AD=\sqrt{5}$.

18．（12分）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=2a_1$，$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_n+1}{2}$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}a_1, & n=1,\\ \dfrac{a_n}{2n+1}, & n\geq 2,\end{cases}$ 求 $\{b_n\}$ 中的最大项与最小项.

【解析】解析一：

（1）$\because \dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_n+1}{2}$，$\therefore \dfrac{a_1}{1}=\dfrac{a_1+1}{2}\Rightarrow a_1=1$，且$S_n=\dfrac{n}{2}(a_n+1)$，①

当$n\ge 2$时，$S_{n-1}=\dfrac{n-1}{2}(a_{n-1}+1)$，②

①−②$\Rightarrow a_n=\dfrac{n}{2}a_n-\dfrac{n-1}{2}a_{n-1}+\dfrac{1}{2}$，$\therefore (n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+1=0$，③

且$n\ge 3$时，$(n-3)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2}+1=0$，④

③−④$\Rightarrow (n-2)a_n-(2n-4)a_{n-1}+(n-2)a_{n-2}=0$，

$\therefore a_n+a_{n-2}=2a_{n-1}$，$\therefore \{a_n\}$成等差数列，

$\because a_1=1,a_2=2,d=1$，$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$.

（2）$b_n=\begin{cases}1,n=1\\ \dfrac{n}{2n+1},n\ge 2\end{cases}$，

$\because n\ge 2$时，$b_n=\dfrac{n}{2n+1}<1$，$\therefore (b_n)_{\max}=b_1=1$，

$b_1=1$，$n\ge 2$时，$b_n=\dfrac{\frac{1}{2}(2n+1)-\frac{1}{2}}{2n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$关于$n$单调递增，

$\therefore (b_n)_{\min}=b_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$.

综上，$\{b_n\}$中的最大项为1，试卷分享Q群：704398182 最小项为$\dfrac{2}{5}$.

解析二：

（1）在$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_n+1}{2}$中，令$n=1$，得$a_1=1$，故$a_2=2a_1=2$.

因为$2S_n=n(a_n+1)$①，所以$2S_{n+1}=(n+1)(a_{n+1}+1)$②，

②−①，得$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+1$，即$(n-1)a_{n+1}=na_n-1$③.

当$n\ge 2$时，将③式两边同时除以$n(n-1)$，得$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n-1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$，

所以$\frac{a_{n+1}-1}{n}=\frac{a_n-1}{n-1}=\cdots=\frac{a_2-1}{2-1}=1$，

所以当$n\geq 2$时，$a_n=n$，

又因为$a_1=1$，所以$a_n=n\ (n\in \mathbf{N}^*)$

法三：因为$2S_n=n(a_n+1)$①，所以$2S_{n+1}=(n+1)(a_{n+1}+1)$②，

②−①，得$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+1$，即$(n-1)a_{n+1}=na_n-1$③，

从而$na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}-1$④，

④−③，得$na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n$，即$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$，

所以$\{a_n\}$为等差数列.

在$\frac{S_n}{n}=\frac{a_n+1}{2}$中，令$n=1$，得$a_1=1$，故$a_2=2a_1=2$，

又因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_n=n\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

（2）由（1）得$b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \frac{n}{2n+1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

当$n\geq 2$时，$b_{n+1}-b_n=\frac{n+1}{2n+3}-\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{(2n+3)(2n+1)}>0$，

且$b_n=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}<\frac{1}{2}$，

所以$b_2<b_3<b_4<\cdots<\frac{1}{2}<1=b_1$，

所以$\{b_n\}$中的最大项为$b_1=1$，最小项为$b_2=\frac{2}{5}$.

19.（12分）新能源汽车作为战略性新兴产业，代表汽车产业的发展方向.发展新能源汽车，对改善能源消费结构、减少空气污染、推动汽车产业和交通运输行业转型升级具有积极意义.经过十多年的精心培育，我国新能源汽车产业取得了显著成绩，产销量连续四年全球第一，保有量居全球首位.

（1）已知某公司生产的新能源汽车电池的使用寿命ξ（单位：万公里）服从正态分布$N(60,16)$，问：该公司每月生产的2万块电池中，大约有多少块电池的使用寿命可以超过68万公里？

参考数据：若随机变量$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma \le \xi \le \mu+\sigma) \approx 0.683$，

$P(\mu-2\sigma \le \xi \le \mu+2\sigma) \approx 0.955$，$P(\mu-3\sigma \le \xi \le \mu+3\sigma) \approx 0.997$.

（2）下表给出了我国2017～2021年新能源汽车保有量y（单位：万辆）的数据.

年份	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码x	1	2	3	4	5
新能源汽车保有量y	153	260	381	492	784

经计算，变量x与y的样本相关系数$r_1 \approx 0.946$，变量x^2与y的样本相关系数$r_2 \approx 0.985$.

①试判断$y=bx+a$与$y=bx^2+a$哪一个更适合作为y与x之间的回归方程模型？

②根据①的判断结果，求出y关于x的回归方程（精确到0.1），并预测2023年我国新能源汽车保有量.

参考数据：令$t_i=x_i^2(i=1,2,3,4,5)$，计算得$\overline{y}=414$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=7704$，$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=32094$，

$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=979$.

参考公式：在回归方程$\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$中，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

【解析】解析一：

（1）$\mu=60,\sigma=4$，$P(\xi>68)=P(\xi>\mu+2\sigma)=\dfrac{1-0.955}{2}=0.0225$.

$\therefore$每月生产的2万电池使用寿命超过68万公里的块数服从$B(20000,0.0225)$的二项分布，

大约有$20000\times0.0225=450$块电池的使用寿命可以超过68万公里.

（2）①$\because r_2>r_1$且相关系数绝对值越大，两变量线性相关性越强.

$\therefore y=bx^2+a$更适合作为y与x之间的回归方程模型.

②令$t_i=x_i^2(i=1,2,3,4,5)$，$\bar{t}=11$，

$$\therefore\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-5\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\bar{t}^2}=\frac{32094-5\times11\times414}{979-5\times11^2}\approx24.9,$$

$\therefore\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=414-24.9\times11=140.1$.

$\therefore y$与x的回归方程为$y=24.9x^2+140.1$，

$\therefore$2023年我国新能源汽车保有量为$y=24.9\times49+140.1\approx1360$万辆.

解析二：

因为新能源汽车电池的使用寿命$\xi\sim N(60,4^2)$，

所以$P(\xi>68)=\dfrac{1-P(\mu-2\sigma\le\xi\le\mu+2\sigma)}{2}=\dfrac{1-0.955}{2}=0.0225$，

所以$20000\times0.0225=450$块.

答：每月生产的2万块电池中，使用寿命超过68万公里的大约有450块.

（2）①因为$|r_2|>|r_1|$，所以$y=bx^2+a$更适合作为y与x之间的.

回归方程模型.

②因为$\bar{t}=\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}=11$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}=\frac{32094-5\times11\times414}{979-5\times11^2}\approx24.9,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=414-24.9\times11=140.1$，

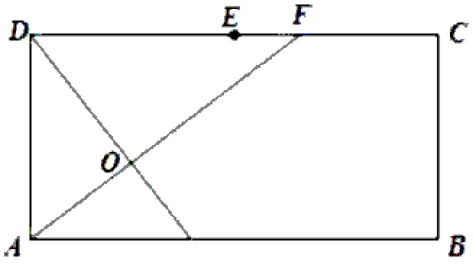
所以$\hat{y}=24.9t+140.1=24.9x^2+140.1$.

当$x=7$时，$\hat{y}=24.9\times49+140.1=1360.2$万辆.

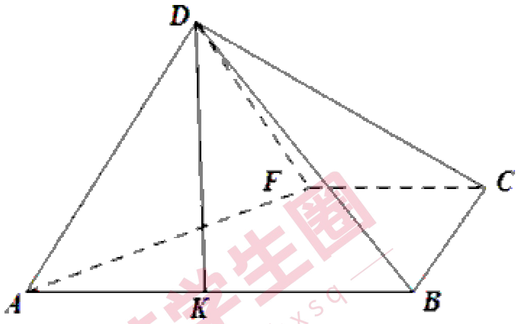
答：2023年我国新能源汽车保有量约为1360.2万辆.

20.（12分）如图1，在长方形$ABCD$中，已知$AB=2,BC=1$，E为CD中点，F为线段EC上（端点E,C除外）的动点，过点D作AF的垂线分别交AF,AB于O,K两点.现将$\triangle DAF$

折起，使得 $DK \perp AB$（如图 2）



（第20题图1）



（第20题图2）

（1）证明：平面 $ABD \perp$ 平面 ABC；

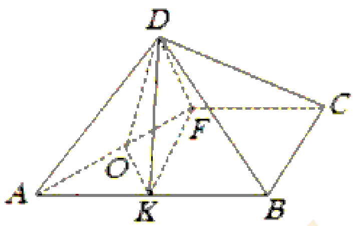
（2）求直线 DF 与平面 ABC 所成角的最大值.

【解析】

（1）**方法一**：$\because AF \perp DO, AF \perp OK, DO \cap OK = O$，$\therefore AF \perp$ 平面 DOK，$\therefore AF \perp DK$，

又 $\because DK \perp AB$，$AF \cap AB = A$，$\therefore DK \perp$ 平面 ABC，又 $\because DK \subset$ 平面 ABD，

$\therefore$ 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC.



方法二：证明：因为 $AF \perp OK, AF \perp OD$，$OD, OK \subset$ 平面 ODK，$OD \cap OK = O$，

所以 $AF \perp$ 平面 ODK.

因为 $DK \subset$ 平面 ODK，所以 $AF \perp DK$.

又因为 $DK \perp AB$，$AB, AF \subset$ 平面 ABC，$AB \cap AF = A$，

所以 $DK \perp$ 平面 ABC.

因为 $DK \subset$ 平面 ABD，所以平面 $ABD \perp$ 平面 ABC.

（2）**方法一**：设 $DF = x, x \in (1,2)$，$\therefore AF = \sqrt{x^2+1}$，$DO = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

翻折前 $1^2 = DO \cdot DK \Rightarrow DK = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$，$\therefore OK = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$，

$\therefore AK^2=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\Rightarrow AK=\frac{1}{x}$，$\therefore FK=\sqrt{1+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$，

而翻折后 $DK=\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$，设 DF 与平面 ABC 所成角试卷分享 Q 群：704398182 为 θ，

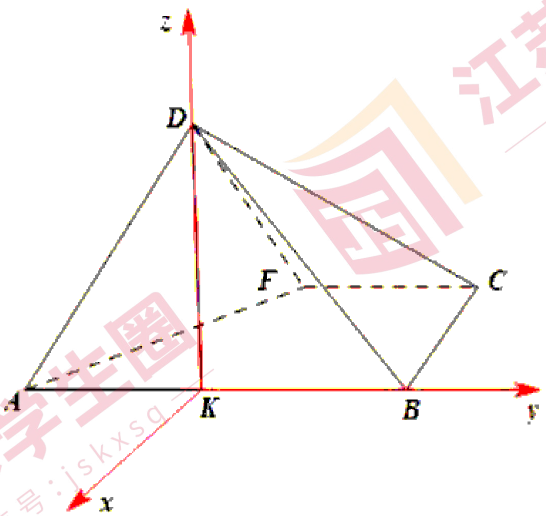
$$\therefore \tan\theta=\frac{DK}{FK}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+x^2-2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-x^2+1}},$$

令 $\sqrt{x^2-1}=t,t\in(0,\sqrt{3})$，

$$\therefore \tan\theta=\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)^2-t^2-1+1}}=\frac{t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{t^2+\frac{1}{t^2}+1}}\le\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore \theta_{\max}=\frac{\pi}{6}$.

方法二：由（1）知 $DK\perp$ 平面 ABC，作 KB 的垂线作为 x 轴，KB 为 y 轴，KD 为 z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $K-xyz$，平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$.



如图（1），$DF=m,AD=1,AF=\sqrt{1+m^2}$，$DO=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$，$AO=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，

$DF=\frac{m^2}{\sqrt{m^2+1}}$，$\frac{DF}{AK}=\frac{AO}{OF}$，$\therefore AK=\frac{1}{m}$.

如图（2）$DK=\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}$，$D\left(0,0,\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\right)$，$F\left(-1,m-\frac{1}{m},0\right)$，

$\overrightarrow{DF}=\left(-1,m-\frac{1}{m},-\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}\right)$，

设 DF 与平面 ABC 所成角为 θ，

$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{DF},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}}{\sqrt{1+m^2-2+\frac{1}{m^2}+1-\frac{1}{m^2}}}=\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{m^2}}}{\sqrt{m^2}}=\sqrt{\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^4}}$，

令 $\frac{1}{m^2}=t$，$\sin\theta=\sqrt{-t^2+t}$，当 $t=\frac{1}{2}$ 时 $\sin\theta$ 取最大值 $\frac{1}{2}$，

$\therefore\theta_{\max}=\frac{\pi}{6}$.

方法三：连结 FK，由（1）可知，直线 DF 与平面 $ABCF$ 所成角为 $\angle DFK$，记 $\angle DFK=\theta$.

在图 1 中，因为 $DK\perp AF$，所以 $\angle DFA+\angle FDK=90^\circ$，

又因为 $\angle FDA=\angle FDK+\angle ADK=90^\circ$，所以 $\angle DFA=\angle ADK$.

又因为 $\angle FDA=\angle DAK=90^\circ$，所以 $\triangle FDA\sim\triangle DAK$.

设 $DF=x\ (1<x<2)$，由 $\frac{DF}{AD}=\frac{DA}{AK}$，得 $\frac{x}{1}=\frac{1}{AK}$，解得 $AK=\frac{1}{x}$.

在图 2 中，因为 $DK\perp AB$，所以 $DK=\sqrt{DA^2-AK^2}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$，

所以 $\sin\theta=\frac{DK}{DF}=\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\le\frac{1}{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时等号成立，

又因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 θ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$，

即直线 DF 与平面 ABC 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

21．（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C_1: x^2=2py$ 的焦点与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点关于直线 $y=x$ 对称.

（1）求 C_1 的标准方程；

（2）若直线 l 与 C_1 相切，且与 C_2 相交于 A, B 两点，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

（注：直线与抛物线有且只有一个公共点，且与抛物线的对称轴不平行，则称该直线与抛物线相切，称该公共点为切点）

【解析】

（1）**方法一：**抛物线 C_1 焦点 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$C_2$ 右焦点 $(1,0)$，$\because$ 它们关于 $y=x$ 对称，

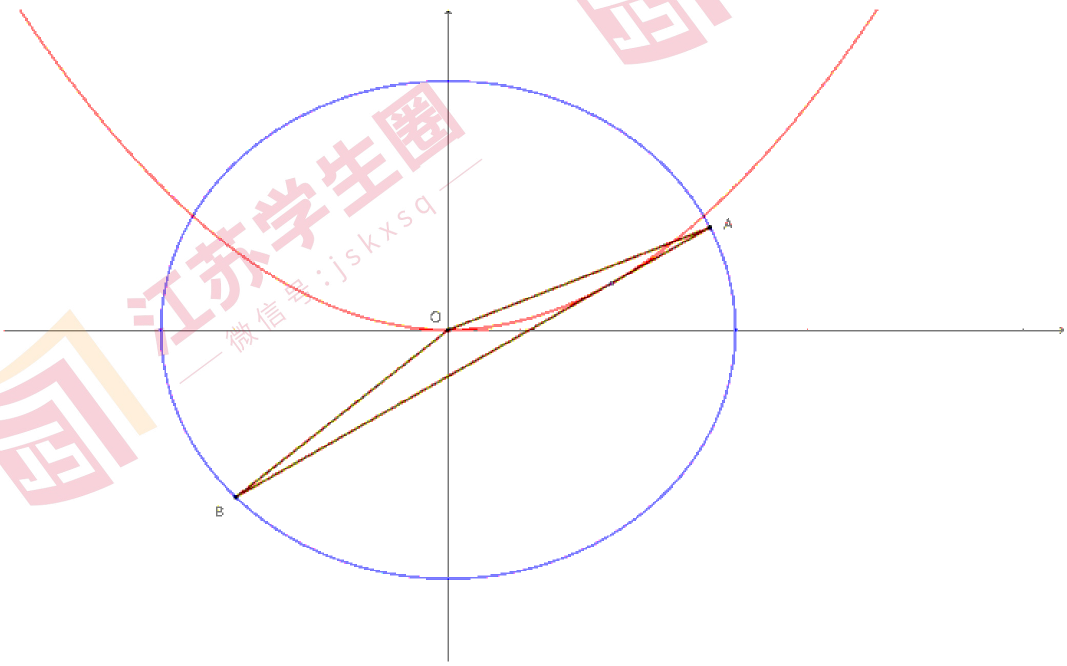
$\therefore \frac{\frac{\pi}{2}}{-1}=-1 \Rightarrow p=2$，$\therefore C_1$ 的标准方程为 $x^2=4y$.

方法二：因为 C_2 的右焦点为 $(1,0)$，C_1 的焦点与 C_2 的右焦点关于直线 $y=x$ 对称，

所以 C_1 的焦点为 $(0,1)$，所以 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，所以 C_1 的标准方程为 $x^2=4y$.

（2）**方法一：**

由“锤子网课解几开悟课程 面积公式 6（证明略）”知：设 $AB: y=kx+m$

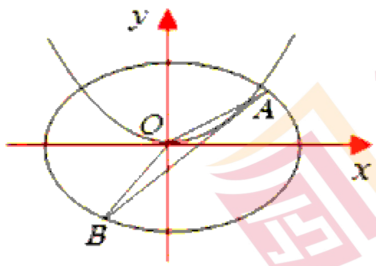


则 $S_{\Delta AOB}=\sqrt{12}\sqrt{(n-1)-(n-1)^2}\le\frac{1}{2}\sqrt{12}=\sqrt{3}$，当 $2m^2=3+4k^2$ 时，

而$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow \Delta=0 \Rightarrow k^2+m=0,(m<0)$

联立得$2m^2=3+4(-m)$，$2m^2+4m-3=0$. $m=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}-1$，

方法二：设直线AB方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2=4y \end{cases} \Rightarrow x^2-4kx-4m=0$，$\Delta=16k^2+16m=0$，$k^2+m=0$，$m<0$，

$\begin{cases} y=kx+m \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow 3x^2+4(k^2x^2+2kmx+m^2)=12$，

$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=48(4k^2-m^2+3)=48(3-m^2-4m)>0$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{48(3-m^2-4m)}}{3+4k^2}$，

O到AB的试卷分享Q群：704398182 距离$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{3-m^2-4m}}{3+4k^2}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{(3-m^2-4m)m^2}}{3-4m}, m\in(-\sqrt{7}-2,0)$

$\le\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\dfrac{3-m^2-4m+m^2}{2}}{3-4m}=\sqrt{3}$，

当且仅当$3-m^2-4m=m^2$即$m=-\dfrac{\sqrt{10}}{2}-1$时取“$=$”，

综上：$(S_{\Delta AOB})_{\max}=\sqrt{3}$.

方法三：设l与C_1相切于点$P(2t,t^2)$ $(t\neq 0)$，因为$y=\dfrac{x^2}{4}$，所以$y'=\dfrac{x}{2}$，

所以l的斜率$k=\dfrac{2t}{2}=t$，所以l的方程为$y=tx-t^2$.

由$\begin{cases} y=tx-t^2, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得$(3+4t^2)x^2-8t^3x+4t^4-12=0$，

因为$\Delta=64t^6-4(3+4t^2)(4t^4-12)>0$，所以$t^4-4t^2-3<0$（*）.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由韦达定理可知$x_1+x_2=\dfrac{8t^3}{3+4t^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^4-12}{3+4t^2}$，

所以$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+t^2}\sqrt{\dfrac{(8t^3)^2-4(4t^4-12)(3+4t^2)}{(3+4t^2)^2}}=\dfrac{4\sqrt{3(1+t^2)(-t^4+4t^2+3)}}{3+4t^2}$.

又因为点O到直线l的距离$d=\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$，

所以$\triangle AOB$的面积$S=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{3(1+t^2)(-t^4+4t^2+3)}}{3+4t^2}\cdot\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}t^2\sqrt{-t^4+4t^2+3}}{3+4t^2}\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{3+4t^2}\cdot\dfrac{(-t^4+4t^2+3)+t^4}{2}=\sqrt{3}$，

当且仅当$t^2=\sqrt{-t^4+4t^2+3}$，即$t^2=\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$时等号成立，

此时$t^4-3-4t^2=-t^4<0$满足（*），

所以$\triangle AOB$面积的最大值为$\sqrt{3}$.

22．（12分）已知函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}$.

（1）若$x\geq 0$时，$f(x)\geq 0$，求实数a的取值范围；

（2）讨论$f(x)$的零点个数.

【解析】解析一：

（1）$\because f(0)=0 \Rightarrow f'(0)=1-\dfrac{a}{2}\geq 0 \Rightarrow a\leq 2$，

当$a\leq 2$时，$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{ax}{x+2}\geq \ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}\geq 0$，

由常用放缩$\ln x\geq 2\dfrac{x-1}{x+1}$易得.

（2）$f'(x)=\dfrac{x^2+(4-2a)x+4-2a}{(x+1)\cdot(x+2)^2}$，

①当$0\leq a\leq 2$时，$f'(x)>0, f(0)=0$，有一零点.

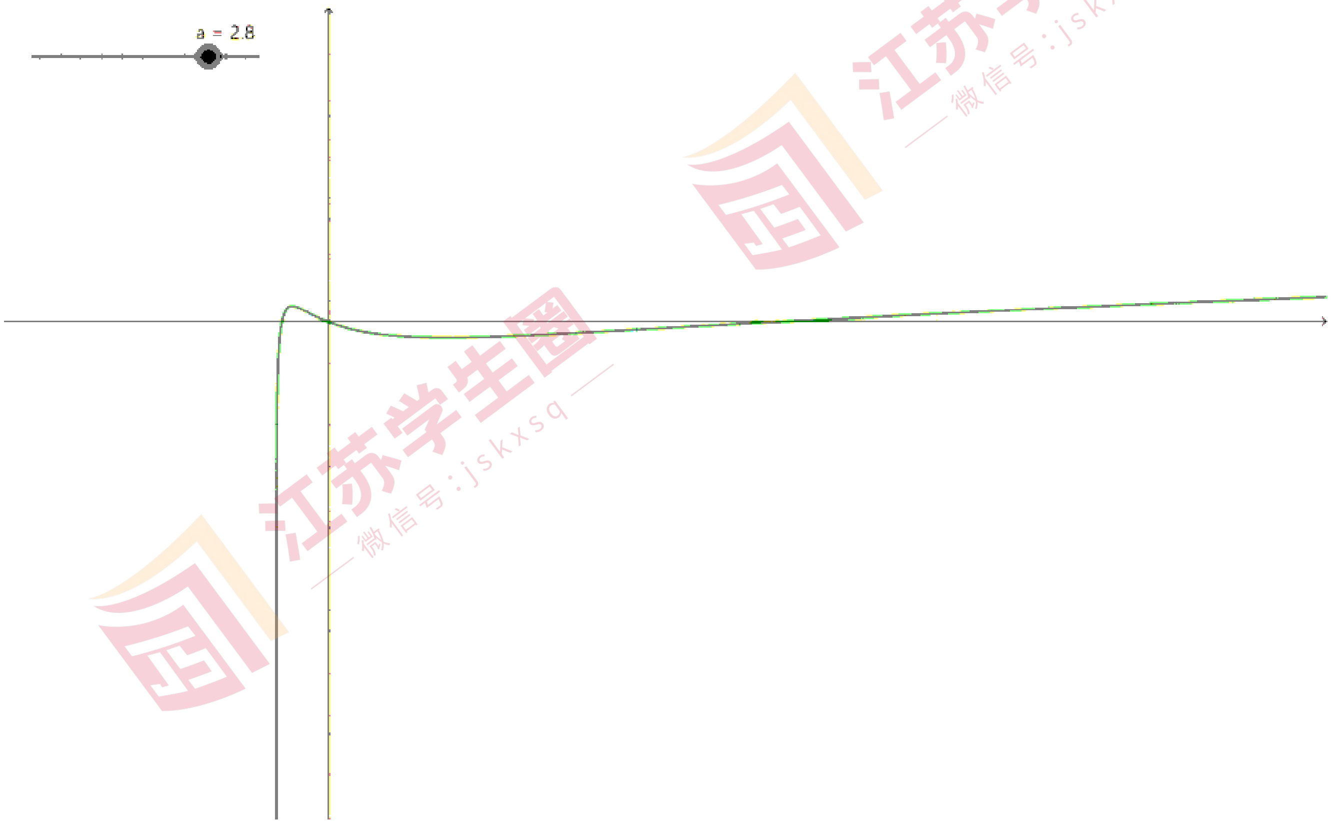
②当$a<0$时，$f'(x)>0, f(x)\nearrow$，而$f(0)=0$有一零点.

③当$a>2$时，$f'(x)$有两零点x_1,x_2且$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，

此时，$f(x)$在$(-1,x_1)\nearrow$，在$(x_1,x_2)\searrow$，在$(x_2,+\infty)\nearrow$，

又$\because x\to-\infty, f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty, f(x)\to+\infty$且$f(0)=0$

$\therefore$在$(-1,x_1),(x_2,+\infty)$还有两零点.



综上，当$a\leq 2$有一零点，当$a>2$，有三零点.

解析二：

（1）$\because f(x)\ge 0=f(0)$ 对 $\forall x\ge 0$ 恒成立，$\therefore f'(0)\ge 0$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-a\cdot\dfrac{x+2-x}{(x+2)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}$，

$f'(0)=1-\dfrac{1}{2}a\ge 0\Rightarrow a\le 2$（必要性），下证充分性.

当 $a\le 2$ 时，$f(x)\ge \ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$，令 $\varphi(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-4(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\ge 0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上↗，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，$\therefore f(x)\ge 0$ 符合题意.

综上：实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

（2）$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+2)^2-2a(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)x+4-2a}{(x+1)(x+2)^2}$，

令 $g(x)=x^2+(4-2a)x+4-2a$，$\Delta=(4-2a)^2-4(4-2a)=2a(2a-4)=4a(a-2)$，

①若 $\Delta=4a(a-2)\le 0$，即 $0\le a\le 2$ 时，$g(x)>0, f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上↗，

$\because f(0)=0$，$\therefore f(x)$ 只有一个零点.

②若 $\Delta>0$，即 $a<0$ 或 $a>2$ 时，

（i）若 $a<0$，则 $g(x)$ 对称轴 $x=a-2<-2$，$\therefore g(x)$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 上↗，

$\because g(-1)=1>0$，$\therefore g(x)>0, f'(x)>0, f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上↗.

$\because f(0)=0$，$\therefore f(x)$ 只有一个零点.

（ii）若 $a>2$，则 $g(x)$ 对称轴 $x=a-2>0$，$\because g(-1)=1>0$，$g(0)=4-2a<0$，

$g(2a)=4+6a>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,2a)$ 上各有一个零点 x_1,x_2.

且当 $-1<x<x_1$ 时，$g(x)>0, f'(x)>0, f(x)$ ↗；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)<0, f'(x)<0, f(x)$ ↘；

当 $x>x_2$ 时，$g(x)>0, f'(x)>0, f(x)$ ↗且 $x>0$，$x\to -1$ 时 $f(x)\to-\infty$；

$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

$\because x_1<0<x_2$，$f(x)$在(x_1,x_2)上↘，$\therefore f(x_1)>f(0)=0$，$f(x_2)<f(0)=0$.

$\therefore f(x)$在$(-1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,+\infty)$上各有一个零点，共三个零点.

综上：当$a\le 2$时，$f(x)$只有一个零点；当$a>2$时，$f(x)$有三个零点.

解析三：

（1）$f(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2a}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+(4-2a)(x+1)}{(x+1)(x+2)^2}$.

①当$a\le 2$时，$f'(x)\ge 0$，所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，

又因为$f(0)=0$，所以当$x\ge 0$时，$f(x)\ge f(0)=0$，满足题意；

②当$a>2$时，令$g(x)=x^2+(4-2a)(x+1)=x^2+(4-2a)x+(4-2a)$，

由$g(x)=0$，得$x_1=(a-2)-\sqrt{a^2-2a}<0$，$x_2=(a-2)+\sqrt{a^2-2a}>0$.

当$x\in(0,x_2)$时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,x_2)$上单调递减，

所以$f(x_2)<f(0)=0$，　　不满足题意.

综上所述，$a\le 2$.

（2）①当$a\le 2$时，由（1）可得$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增，且$f(0)=0$，

所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上存在1个零点；

②当$a>2$时，由（1）可得$g(x)=0$必有两根x_1,x_2，

又因为$g(-1)=1>0$，$g(0)=4-2a<0$，所以$x_1\in(-1,0)$，$x_2\in(0,+\infty)$.

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值$f(x_1)$	单调递减	极小值$f(x_2)$	单调递增

当$x\in(x_1,x_2)$时，因为$f(0)=0$，所以$f(x)$在(x_1,x_2)上存在1个零点，

且$f(x_1)>f(0)=0$，$f(x_2)<f(0)=0$；

当$x\in(-1,x_1)$时，因为$f(e^{-a}-1)=\ln e^{-a}-\dfrac{a(e^{-a}-1)}{e^{-a}+1}=\dfrac{-2ae^{-a}}{e^{-a}+1}<0$，

所以$-1<e^{-a}-1<x_1$，所以$f(x)$在$(-1,x_1)$上存在1个零点；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，因为$f(\mathrm{e}^a-1)=\ln \mathrm{e}^a-\dfrac{a(\mathrm{e}^a-1)}{\mathrm{e}^a+1}=\dfrac{2a}{\mathrm{e}^a+1}>0$，

所以$\mathrm{e}^{-a}-1>x_2$，所以$f(x)$在$(x_2,+\infty)$上存在1个零点.

从而$f(x)$在$(-1,+\infty)$上存在3个零点.

综上所述，当$a\le 2$时，$f(x)$存在1个零点；当$a>2$时，$f(x)$存在3个零点.