24 届广东省普通高中学科综合素养评价
9 月南粤名校联考

数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	C	C	C	A	A	D	BC	DCD	BC	ABC

13-16 题 -80 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{9}{8}$ $\sqrt{2}$

17．解析：（Ⅰ）在△ABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\mathrm{R}$，

及 $c\cos B+b\cos C=a\sin(B+\frac{\pi}{6})$，

可得，$\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin A\sin(B+\frac{\pi}{6})$ ....2 分

$\sin(B+C)=\sin A\sin(B+\frac{\pi}{6})$， ....3 分

因为△ABC 中，$\sin(B+C)=\sin A$ 且 $\sin A\neq 0$，故 $\sin(B+\frac{\pi}{6})=1$，..........4 分

因为 $0<\mathrm{B}<\pi$.，所以 $B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$ ....5 分

（Ⅱ）在△ABC 中，由余弦定理及 $a=2,c=3,B=\frac{\pi}{3}$，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=7$，故

$b=\sqrt{7}$． ....6 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．因为 $a<c$，故 $\cos A=\frac{2}{\sqrt{7}}$ .....8 分

$\therefore\cos(2B-A)=\cos(\frac{2\pi}{3}-A)=\cos\frac{2\pi}{3}\cos A+\sin\frac{2\pi}{3}\sin A$

$=(-\frac{1}{2})\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$

............10 分

18．解：（Ⅰ）由已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+3$，　∴ $n\geq 2$ 时，$S_n=3S_{n-1}+2n+1$，

两式相减，得 $S_{n+1}-S_n=3(S_n-S_{n-1})+2$， ....2 分

即 $a_{n+1}=3a_n+2$，　从而 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$． ....3 分

又当 n=1 时，$S_2=3S_1+5$，，　∴ $a_1+a_2=3a_1+5$　又 $a_1=3$，$\therefore a_2=11$，

.............4 分

从而 $a_2+1=3(a_1+1)$.　故总有 $a_{n+1}+1=3(a_n+1), n\in N^*$.

又∵ $a_1=3$,　$\therefore a_n+1\neq 0$,

从而 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$.　.............5 分

即 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=4$ 为首项，公比为 3 的等比数列.

$\therefore a_n+1=4\cdot 3^{n-1}, \therefore a_n=4\cdot 3^{n-1}-1$,　.............6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_n=4\times 3^{n-1}-1$.

.　$\therefore b_n=na_n=n(4\times 3^{n-1}-1)=4n\times 3^{n-1}-n$.　.............7 分

设 $c_n=n\times 3^{n-1}$，设 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n'

则 $S_n'=1+2\times 3+3\times 3^2+\cdots n\times 3^{n-1}$ ①

$3S_n'=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+(n-1)\times 3^{n-1}+n\times 3^n$ ②

①-②有 $-2S_n'=(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-n\times 3^n$　.............9 分

$S_n'=\frac{2n-1}{4}\times 3^n+\frac{1}{4}$　.............10 分

从而 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$

$=4S_n'-(1+2+\cdots+n)$

$=(2n-1)\times 3^n-\frac{n(n+1)}{2}+1$　.............12 分

19. 解析（1）证明：D 是正方形 AA_1B_1B 的中心，$AA_1=\sqrt{2}$，则 $DA_1=1$，

又 $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B，$\therefore C_1D\perp DA_1$，又 $C_1D=1$　......1 分

$\therefore C_1A_1=\sqrt{2}$，同理 $C_1B_1=\sqrt{2}, AC_1=\sqrt{2}$　.............3 分

$\therefore \Delta A_1B_1C_1, \Delta A_1AC_1$ 均为等边三角形，又 M 为 A_1C_1 中点，

$\therefore A_1C_1\perp B_1M, A_1C_1\perp AM, B_1M\cap AM=M$,

又 $\because B_1M\subset$ 平面 AB_1M　$AM\subset$ 平面 AB_1M

$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 AB_1M　..........5 分

$\because AC // A_1C_1$，$\therefore AC \perp$ 平面 AB_1M ....6 分

（2）解： 以 D 为原点，DA, DA_1, DC_1 分别为 x, y, z 轴正方向，建立空间直角坐标系， ....7 分

$B(0,-1,0), A_1(0,1,0), C(1,-1,1), C_1(0,0,1)$ ....8 分

$\therefore \overrightarrow{A_1B}=(0,-2,0), \overrightarrow{A_1C}=(1,-2,1), \overrightarrow{A_1C_1}=(0,-1,1)$ ....9 分

设面 A_1BC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-2y+z=0\\ -2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=-x\\ y=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,0,-1)$，由（1）知，面 AB_1M 的法向量为 $\overrightarrow{A_1C_1}$ ....10 分

设面 AB_1M 与面 A_1BC 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{A_1C_1}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$ ......11 分

$\therefore \theta=60^\circ$ ....12 分

20. 解：（1）若乙得 6 分，则需乙前 3 个投篮投中，第 4 个投篮未中，

其概率为 $p^3\cdot(1-p)=\dfrac{1-p}{8}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$ ......4 分

（2）设 X 为甲累计获得的分数，则 $X\sim B(5,\dfrac{1}{2})$,所以 $E(X)=np=5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$，...6 分

设 Y 为乙累计获得的分数，则 $Y=0,2,4,6,8,10$， ......7 分

$P(Y=0)=\dfrac{1}{2}$　　$P(Y=2)=\dfrac{1}{2}\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{4}$

$P(Y=4)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{8}$　　$P(Y=6)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{16}$

$P(Y=8)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{32}$　　$P(Y=10)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$ ......9 分

所以 Y 的分布列为：

Y	0	2	4	6	8	10
P	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{1}{32}$

所以 $E(Y)=0\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{8}+6\times\dfrac{1}{16}+8\times\dfrac{1}{32}+10\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{31}{16}$ ......11 分

因为 $E(X)>E(Y)$,所以甲获胜的可能性大 ......12 分

21. 解析：（1）由已知得渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$，右焦点 $F(c,0)$，

$\therefore \dfrac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{3}$，又 $\because a^2+b^2=c^2$，解得 $b=\sqrt{3}$ ....2 分

又因为离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，解得 $a=1, c=2$ ....3 分

$\therefore$ 双曲线的标准方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ....4 分

（2）解法 1：当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，此时，$\triangle FMN$ 的面积 $S_{\triangle FMN}=\sqrt{3}$； ....5 分

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，直线与双曲线联立得

$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=kx+m \end{cases} \Rightarrow (k^2-3)x^2+2kmx+m^2+3=0$， ....6 分

因为相切，所以 $\Delta = 4k^2m^2-4(k^2-3)(m^2+3)=0$，解得 $m^2=k^2-3>0$ .....7 分

另设：$M(x_1,y_1), N(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases} 3x^2-y^2=0 \\ y=kx+m \end{cases} \Rightarrow (k^2-3)x^2+2kmx+m^2=0$

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{-2km}{k^2-3}=\dfrac{-2k}{m}, x_1\cdot x_2=1$

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=-\dfrac{3}{m}$,

$y_1\cdot y_2=k^2\cdot x_1\cdot x_2+km(x_1+x_2)+m^2=-3$ ....9 分

在 $\triangle OMN$ 中，$|OM|=2x_1$ ，$|ON|=2x_2$

$\therefore S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON=2x_1\cdot x_2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ ....10 分

所以 $S_{\triangle FMN}=S_{\triangle OFM}+S_{\triangle OFN}-S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|OF||y_1-y_2|-\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle FMN}=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}-\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+12}-\sqrt{3}$ ....11 分

因为 $m^2=k^2-3>0$，所以 $S_{\triangle FMN}=\sqrt{\dfrac{9}{m^2}+12}-\sqrt{3}>2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$

综上所述，$S_{\triangle FMN}\geq\sqrt{3}$，其最小值为$\sqrt{3}$ ....12 分

解法 2：由条件知，若直线l的斜率存在，则斜率不为零，

故可设l： $x=my+n$，直线与双曲线联立得

$$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\x=my+n\end{cases}\Rightarrow\left(3m^2-1\right)y^2+6mny+3n^2-3=0,$$ ....6 分

因为相切，所以$\begin{cases}\Delta=36k^2m^2n^2-4\left(3n^2-3\right)\left(3m^2-1\right)=0\\3m^2-1\neq0\end{cases}$，

即$\begin{cases}3m^2+n^2=1\\3m^2-1\neq0\end{cases}$ .....7 分

又因为直线l与双曲线的渐近线交于两点，设为：$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=0\\x=my+n\end{cases}\Rightarrow\left(3m^2-1\right)y^2+6mny+3n^2=0$ ....8 分

由直线l的方程得，直线与x轴的交点坐标为$(n,0)$ ....9 分

$$\therefore S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}|2-n|\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\frac{1}{2}|2-n|\frac{\sqrt{12n^2}}{\left|3m^2-1\right|}=\left|\frac{\sqrt{3}(2-n)}{n}\right|=\sqrt{3}\left|\frac{2}{n}-1\right|$$

.........11 分

$\because 3m^2+n^2=1$，　$\therefore n^2\leq1$，

即$-1\leq n\leq1$，且$n\neq0$

$\therefore n=1$时，$S_{\triangle FMN}$的最小值为$\sqrt{3}$

综上所述，$S_{\triangle FMN}\geq\sqrt{3}$，其最小值为$\sqrt{3}$ ....12 分

22. 解析：（1）$f'(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}-m=-\dfrac{mx^2-2x+1}{x^2}(x>0)$ ....1 分

令$g(x)=mx^2-2x+1(x>0)$，判别式为Δ=4-4m ....2 分

当$m=0$时，$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2})$上单调递减，在$(\dfrac{1}{2},+\infty)$上单调递增；.........3 分

当$m<0$时，方程有一个正根$\dfrac{1+\sqrt{1-m}}{m}$，$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1+\sqrt{1-m}}{m}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1+\sqrt{1-m}}{m},+\infty\right)$

上单调递增；.........4 分

当 $0<m<1$ 时，方程有两个正根，分别为 $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-m}}{m}$，所以 $f(x)$ 在

$(0,\dfrac{1-\sqrt{1-m}}{m}),(\dfrac{1+\sqrt{1-m}}{m},+\infty)$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1-\sqrt{1-m}}{m},\dfrac{1+\sqrt{1-m}}{m})$ 上单调递增；.........5 分

当 $m\geq 1$ 时，$f'(x)\leq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；.........6 分

(2) 要证 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{a^2+b^2}{a^2b+ab^2}$

只需证 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab(a+b)}$

只需证 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{a+b}{ab}-\dfrac{2}{a+b}$

只需证 $\ln b-\ln a<\dfrac{b^2-a^2}{ab}-2\cdot\dfrac{b-a}{a+b}$

只需证 $\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}-2\cdot\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1}$ ....9 分

设 $t=\dfrac{b}{a}>1$，则需证 $\ln t<t-\dfrac{1}{t}-2\cdot\dfrac{t-1}{t+1},(t>1)$

只需证 $2\ln t-\ln t<t-\dfrac{1}{t}-2\cdot\dfrac{t-1}{t+1},(t>1)$

由（1）知，$2\ln t<t-\dfrac{1}{t},(t>1)$，

所以只需 $-\ln t<-\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$

即证 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$ ....10 分

令 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$，则 $g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$ 恒成立，所以当 $t>1$ 时，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(t)>g(1)=0$，所以 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$ 成立，

因此，原不等式得证. ....12 分

关于我们