# 2021 北京海淀高三（上）期末

# 数　学

2020.01

本试卷共 8 页，150 分。考试时常 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，本试卷和答题纸一并交回。

**第一部分（选择题 共 40 分）**

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）抛物线 $y^2=x$ 的准线方程是

（A）$x=-\frac{1}{2}$　（B）$x=-\frac{1}{4}$　（C）$y=-\frac{1}{2}$　（D）$y=-\frac{1}{4}$

（2）在复平面内，复数 $\frac{i}{1+i}$ 对应的点位于

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

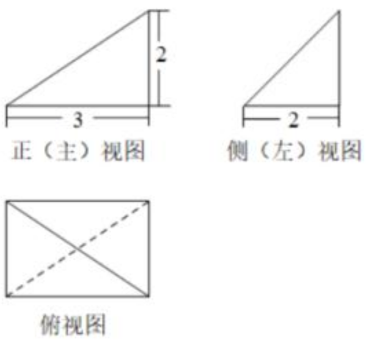
（3）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，$x^4$ 的系数为

（A）5　（B）$-5$　（C）10　（D）10

（4）已知直线 $l:x+ay+2=0$，点 A $(-1,-1)$ 和点 B $(2,2)$，若 $l//AB$，则实数 $a$ 的值为

（A）1　（B）$-1$　（C）2　（D）$-2$

（5）某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的体积为




（A）2　（B）4　（C）6　（D）12

（6）已知向量 $a$，$b$ 满足 $|a|=1$，$b=(-2,1)$，且 $|a-b|=2$，则 $a\cdot b=$

（A）$-1$　（B）0　（C）1　（D）2

（7）已知$\alpha$，$\beta$是两个不同的平面，“$\alpha // \beta$”的一个充分条件是

（A）$\alpha$ 内有无数直线平行于$\beta$

（B）存在平面$\gamma$，$\alpha \perp \gamma$，$\beta \perp \gamma$

（C）存在平面$\gamma$，$\alpha \cap \gamma = m$，$\beta \cap \gamma = n$ 且 $m // n$

（D）存在直线$l$，$l \perp \alpha$，$l \perp \beta$

（8）已知函数 $f(x)=1-2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$ 则

（A）$f(x)$ 是偶函数

（B）函数 $f(x)$ 的最小正周期为$2\pi$

（C）曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称

（D）$f(1)>f(2)$

（9）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2-3n$，$n\in N$，前$n$项和为$S_n$，给出

下列三个结论：

①存在正整数$m,n(m\neq n)$，使得$S_m=S_n$；

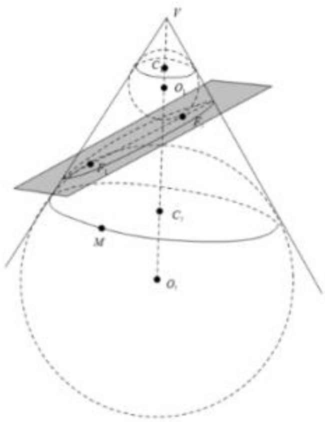
②存在正整数$m,n(m\neq n)$，使得$a_m+a_n=2\sqrt{a_m a_n}$；

③记，$T_n=a_1a_2\cdots a_n(1,2,3,\ldots)$则数列$\{T_n\}$有最小项，其中所有正

确结论的序号是

（A）① （B）③ （C）①③ （D）①②③

(10) 如图所示，在圆锥内放入连个球$O_1$，$O_2$，它们都与圆锥相切（即与圆锥的每条母线相切），切点圆（图中粗线所示）分别为$\odot C_1, \odot C_2$. 这两个球都与平面$\alpha$相切，切点分别为$F_1$，$F_2$，丹德林（G·Dandelin）利用这个模型证明了平面$\alpha$与圆锥侧面的交线为椭圆，$F_1$，$F_2$为此椭圆的两个焦点，这两个球也称为 Dandelin 双球。若圆锥的母线与它的轴的夹角为$30^0$，$\odot C_1, \odot C_2$的半径分别为 1,4，点$M$为$\odot C_2$上的一个定点，点$P$为椭圆上的一个动点，则从点$P$沿圆锥表面到达$M$的路线长与线段$PF_1$的长之和的最小值是

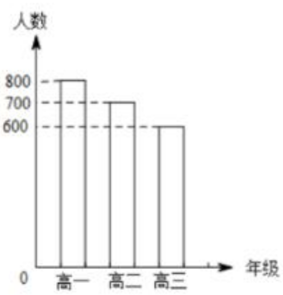


(A) 6　　(B) 8　　(C) $3\sqrt{3}$　　(D) $4\sqrt{3}$

**第二部分（非选择题 共 110 分）**

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

(11) 在“互联网+”时代，国家积极推动信息化技术与传统教学方式的深度融合，实现线上、线下融合式教学模式变革.某校高一、高二和高三学生人数如图所示.采用分层抽样的方法调查融合式教学模式的实施情况，在抽取样本中，高一学生有 16 人，则该样本中的高三学生人数为____.




(12) 设等比数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$.若$-S_1$、$S_2$、$a_3$成等差数列，则数列$\{a_n\}$的公比为____.

(13) 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，点$M(-3,4)$，则双曲线的渐近线方程为_____；

$|MF_1|-|MF_2|=$____；

（14）已知函数 $f(x)$ 是定义域 $R$ 的奇函数，且 $x\le 0$ 时，$f(x)=ae^x-1$，则 $a=$____，$f(x)$ 的值域是____；

（15）已知圆 $P:(x-5)^2+(y-2)^2=2$，直线 $l:y=ax$，点 $M(5,2+\sqrt{2})$，点 $A(s,t)$.

给出下列 4 个结论：

①当 $a=0$，直线 $l$ 与圆 $P$ 相离；

②若直线 $l$ 圆 $P$ 的一条对称轴，则 $a=\dfrac{2}{5}$；

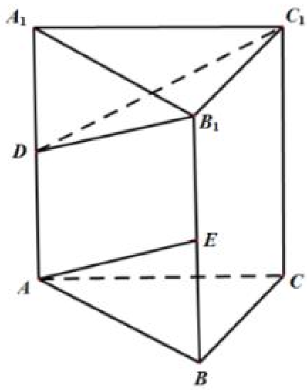
③若直线 $l$ 上存在点 $A$，圆 $P$ 上存在点 $N$，使得 $\angle MAN=90^\circ$，则 $a$ 的最大值为 $\dfrac{20}{21}$；

④ $N$ 为圆 $P$ 上的一动点，若 $\angle MAN=90^\circ$，则 $t$ 的最大值为 $\dfrac{5\sqrt{2}+8}{4}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

**三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。**

（16）（本小题共 15 分）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $BCC_1B_1$ 为矩形，$AC\perp$ 平面 $BCC_1B_1$, $D,E$ 分别是棱 $AA_1$，$BB_1$ 的中点.




（I）求证：$AE//$ 平面 $B_1C_1D$

（II）求证: $CC_1\perp$ 平面 $ABC$

(III)若 $AC=BC=AA_1=2$ ,求直线 $AB$ 与平面 $B_1C_1D$ 所成角的正弦值.

（17）（本小题共 14 分）若存在 $\Delta ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解答下列问题：

（I）求 $\angle A$ 的大小；

（II）求 $\cos B$ 和 $a$ 的值.

条件①：$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$；

条件②：$a=\dfrac{7}{3}c$；

条件③：$b-a=1$；

条件④：$b\cos A=-\dfrac{5}{2}$

（18）（本小题共 14 分）

某公司在 2013~2021 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示：

| 年份 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 年生产台数（单位：万台） | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 9 | 10 | 10 | $a$ |
| 年返修台数（单位：台） | 32 | 38 | 54 | 58 | 52 | 71 | 80 | 75 | $b$ |
| 年利润（单位：百万元） | 3.85 | 4.50 | 4.20 | 5.50 | 6.10 | 9.65 | 10.00 | 11.50 | $c$ |

注：$年返修率=\dfrac{年返修台数}{年生产台数}$.

（I）从 2013~2020 年中随机抽取一年，求该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率；

（II）公司规定：若年返修率不超过千分之一，则该公司生产部门当年考核优秀.现从 2013~2020 年中随机选出 3 年，记 $\zeta$ 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数.求 $\zeta$ 的分布列和数学期望；

（III）记公司在 2013~2015 年，2016~2018 年，2019~2021 年的年生产台数的方差分别为 $s_1^2,s_2^2,s_3^2$.若 $s_3^2\le\max\{s_1^2,s_2^2\}$，其中 $\max\{s_1^2,s_2^2\}$ 表示 $s_1^2,s_2^2$，这两个数中最大的数.请写出 $a$ 的最大值和最小值.（只需写出结论）

（注：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots(x_n-\overline{x})^2]$，其中 $\overline{x}$ 为数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数）

（19）（本小题共 14 分）已知椭圆 $W:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点 C（2,$\sqrt{3}$）.

（I）求椭圆 $W$ 的方程及其长轴长；

（II）$A$，$B$ 分别为椭圆 $W$ 的左、右顶点，点 $D$ 在椭圆 $W$ 上，且位于 $x$ 轴下方，直线 $CD$ 交 $x$ 轴于点 $Q$，若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$，求点 $D$ 的坐标.

（20）（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）设 $g(x)=f(x)-x$，求证：$g(x)\le -1$；

（III）设 $h(x)=f(x)-x^2+2ax-4a^2+1$.若存在 $x_0$ 使得 $h(x_0)\ge 0$，求 $a$ 的最大值.

（21）（本小题共 14 分）设 A 是由 $n\times n(n\geq 2)$ 个实数组成的 $n$ 行 $n$ 列的数表，满足：每个数的绝对值是1，且所有数的和是非负数，则称数表 A 是“$n$ 阶非负数表”.

（I）判断如下数表 $A_1$，$A_2$ 是否是“4 阶非负数表”；

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |

数表 $A_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1 | 1 | 1 | -1 |
| 1 | -1 | 1 | -1 |
| 1 | 1 | -1 | -1 |

数表 $A_2$

（II）对于任意“5 阶非负数表”A，记 $R(s)$ 为 A 的第 $s$ 行各数之和 $(1\leq s\leq 5)$，证明：存在 $\{i,j,k\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，使得 $R(i)+R(j)+R(k)\geq 3$；

（III）当 $n=2k(k\in\mathrm{N}^*)$ 时，证明：对与任意“$n$ 阶非负数表”A，均存在 $k$ 行 $k$ 列，使得这 $k$ 行 $k$ 列交叉处的 $k^2$ 个数之和不小于 $k$.

# 海淀区高三年级第一学期期末练习

## 数学参考答案　　2021.1

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。**

| 题号 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） | （6） | （7） | （8） | （9） | （10） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | D | B | A | C | D | C | C | A |

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

| 题号 | （11） | （12） | （13） | （14） | （15） |
|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | 12 | 3 或 $-1$ | $\sqrt{2}x\pm y=0$ <br> $-2$ | 1　$(-1,1)$ | ①②④ |

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 15 分）

**解：**（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1 // BB_1$，且 $AA_1=BB_1$.

因为 点 $D,E$ 分别是棱 $AA_1,BB_1$ 的中点，

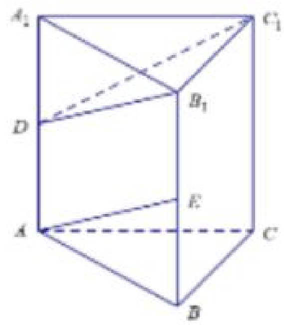
所以 $AD // B_1E$，且 $AD=B_1E$.

所以 四边形 $AEB_1D$ 是平行四边形.

所以 $AE // DB_1$.

又因为 $AE\not\subset$ 平面 $B_1C_1D$，$DB_1\subset$ 平面 $B_1C_1D$，

所以 $AE //$ 平面 $B_1C_1D$.




（Ⅱ）因为 $AC\perp$ 平面 $BCC_1B_1$，$CC_1\subset$ 平面 $BCC_1B_1$，

所以 $AC\perp CC_1$.

因为 侧面 $BCC_1B_1$ 为矩形，

所以 $CC_1\perp BC$.

又因为 $AC\cap BC=C$，$AC\subset$ 平面 $ABC$，$BC\subset$ 平面 $ABC$，

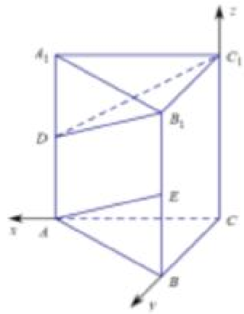
所以 $CC_1\perp$ 平面 $ABC$.

（Ⅲ）分别以 $CA$，$CB$，$CC_1$ 所在的直线为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$，由题意得 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(0,0,2)$，$D(2,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{C_1D}=(2,0,-1)$.

设平面 $B_1C_1D$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2y=0,\\ 2x-z=0.\end{cases}$$




令 $x=1$，则 $y=0$，$z=2$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 直线 $AB$ 与平面 $B_1C_1D$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

（17）（本小题共 14 分）

选择①②③

**解：**（Ⅰ）因为 $a=\dfrac{7}{3}c$，$\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理得 $\sin A=\dfrac{a}{c}\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b-a=1$，

所以 $a<b$.

所以 $0<\angle A<\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）在△$ABC$ 中，$a=\dfrac{7}{3}c$，

所以 $a>c$.

所以 $0<\angle C<\dfrac{\pi}{2}$.

因为 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{13}{14}$.

所以 
$$\begin{aligned}\cos B&=\cos(\pi-(A+C))=-\cos(A+C)\\&=\sin A\sin C-\cos A\cos C\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{13}{14}=-\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理得 $\dfrac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{b}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a}$，即 $7b=8a$.

因为 $b-a=1$，
所以 $a=7$.

选择①②④

**解：**（Ⅰ）因为 $a=\frac{7}{3}c$， $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

由正弦定理得 $\sin A=\frac{a}{c}\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中， $b\cos A=-\frac{5}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{2}<\angle A<\pi$.

所以 $\angle A=\frac{2\pi}{3}$.

（Ⅱ）在 $\triangle ABC$ 中， $a=\frac{7}{3}c$，

所以 $a>c$.

所以 $0<\angle C<\frac{\pi}{2}$.

因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{13}{14}$.

所以 $\cos B=\cos(\pi-(A+C))=-\cos(A+C)$

$$=\sin A\sin C-\cos A\cos C$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{13}{14}=\frac{11}{14}.$$

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

因为 $b\cos A=-\frac{5}{2}$，

所以 $b=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5$.

由正弦定理得 $a=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot b=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}\times 5=7$.

（18）（本小题共 14 分）

**解：**（Ⅰ）由图表知，2013~2020 年中，产品的平均利润小于 100 元/台的年份只有 2015 年，2016 年.

所以 从 2013~2020 年中随机抽取一年，该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率为$\frac{6}{8}=0.75$.

（Ⅱ）由图表知，2013~2020 年中，返修率超过千分之一的年份只有 2013，2015 年，

所以$\xi$ 的所有可能取值为$1,2,3$.

$P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$P(\xi=2)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(\xi=3)=\frac{C_6^3C_2^0}{C_8^3}=\frac{5}{14}$.

所以$\xi$ 的分布列为

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{3}{28}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{5}{14}$ |

故$\xi$ 的数学期望 $E(\xi)=1\times\frac{3}{28}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{14}=\frac{9}{4}$.

（Ⅲ）$a$ 的最大值为$13$，最小值为$7$.

（19）（本小题共 14 分）

**解：**（Ⅰ）因为 椭圆$W$ 经过点$C(2,\sqrt{3})$，

所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$.

因为 椭圆$W$ 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，其中$a^2=b^2+c^2$.

所以 $\begin{cases}a=4,\\ b=2.\end{cases}$

所以 椭圆$W$ 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，长轴长 $2a=8$.

（Ⅱ）当直线$CD$ 的斜率不存在时，由题意可知$D(2,-\sqrt{3})$，$Q(2,0)$.

由（Ⅰ）可知 $A(-4,0)$，$B(4,0)$.

所以 △$ACQ$ 的面积为$\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，△$BDQ$ 的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

显然△$ACQ$ 的面积比△$BDQ$ 的面积大$2\sqrt{3}$.

当直线$CD$的斜率存在时，由题意可设直线$CD$的方程为$y-\sqrt{3}=k(x-2)$，

且$k\neq 0$.

令$y=0$，得$x=2-\frac{\sqrt{3}}{k}$，所以 $Q(2-\frac{\sqrt{3}}{k},0)$.

由$\begin{cases} y-\sqrt{3}=k(x-2), \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得$(\frac{1}{k^2}+4)y^2+(\frac{4}{k}-\frac{2\sqrt{3}}{k^2})y+\frac{3}{k^2}-\frac{4\sqrt{3}}{k}-12=0$.

依题意可得点$D$的纵坐标$y_D=\frac{2\sqrt{3}-4k}{1+4k^2}-\sqrt{3}=\frac{-4\sqrt{3}k^2-4k+\sqrt{3}}{1+4k^2}$.

因为 点$D$在$x$轴下方，所以$y_D<0$，即$-4<2-\frac{\sqrt{3}}{k}<4$.

所以 $\triangle ACQ$的面积为$\frac{1}{2}|AQ|\cdot|y_C|=\frac{1}{2}(2-\frac{\sqrt{3}}{k}+4)\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}(6-\frac{\sqrt{3}}{k})$，

$$\begin{aligned}\triangle BDQ\text{的面积为}\frac{1}{2}|BQ|\cdot|y_D|&=\frac{1}{2}|4-2+\frac{\sqrt{3}}{k}||y_D|=\frac{1}{2}|2+\frac{\sqrt{3}}{k}||y_D| \\ &=\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{3}}{k})(-\frac{-4\sqrt{3}k^2-4k+\sqrt{3}}{1+4k^2}) \\ &=\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{3}}{k})(\frac{4\sqrt{3}k^2+4k-\sqrt{3}}{1+4k^2}).\end{aligned}$$

因为 $\triangle ACQ$的面积比$\triangle BDQ$的面积大$2\sqrt{3}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}(6-\frac{\sqrt{3}}{k})-\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{3}}{k})(\frac{4\sqrt{3}k^2+4k-\sqrt{3}}{1+4k^2})=2\sqrt{3}$.

此原方程无解.

综上所述，点$D$的坐标为$(2,-\sqrt{3})$.

**方法二**

因为 点$D$在$x$轴下方，所以 点$Q$在线段$AB$（不包括端点）上.

由（Ⅰ）可知$A(-4,0)$，$B(4,0)$.

所以 $\triangle AOC$的面积为$\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

因为 $\triangle ACQ$的面积比$\triangle BDQ$的面积大$2\sqrt{3}$，

所以 点$Q$在线段$OB$（不包括端点）上，且$\triangle OCQ$的面积等于$\triangle BDQ$的面积.

所以 $\triangle OCB$的面积等于$\triangle BCD$的面积.

所以 $OD\parallel BC$.

设$D(m,n)$，$n<0$，

则$\frac{n}{m}=\frac{0-\sqrt{3}}{4-2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 点$D$在椭圆$W$上，

所以 $\frac{m^2}{16}+\frac{n^2}{4}=1$.

所以 $\begin{cases} m=2, \\ n=-\sqrt{3}. \end{cases}$

所以 点 $D$ 的坐标为 $(2,-\sqrt{3})$.

（20）（本小题共 14 分）

**解：**（Ⅰ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

| $x$ | $(0,\mathrm{e})$ | $\mathrm{e}$ | $(\mathrm{e},+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | – |
| $f(x)$ | ↗ | 极大 | ↘ |

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$.

（Ⅱ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x$.

所以 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$.

① 当 $x\in(0,1)$ 时，$1-x^2>0$, $-\ln x>0$，所以 $g'(x)>0$；

② 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1-x^2<0$, $-\ln x<0$，所以 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增，在 $(1,+\infty)$ 内单调递减.

所以 $g(x)\le g(1)=-1$.

（Ⅲ）因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x^2+2ax-4a^2+1$.

① 当 $0\le a\le\dfrac{1}{2}$ 时，$h(1)=2a-4a^2=2a(1-2a)\ge 0$，即存在 1，使得 $h(1)\ge 0$；

② 当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，由（Ⅱ）可知，$\dfrac{\ln x}{x}-x\le -1$，即 $\dfrac{\ln x}{x}\le x-1$.

所以 $h(x)\le x-x^2+2ax-4a^2$

$$=-(x-\frac{2a+1}{2})^2+\frac{(2a+1)^2}{4}-4a^2$$

$\le -3a^2+a+\frac{1}{4}$

$=\frac{-(2a-1)(6a+1)}{4}$

$<0$.

所以 对任意 $x>0$，$h(x)<0$，即不存在 $x_0$ 使得 $h(x_0)\ge 0$.

综上所述，$a$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$.

（21）（本小题共 14 分）

**解**：记 $a(i,j)$ 为数表 A 中第 $i$ 行第 $j$ 列的数，$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a(i,j)$ 为数表 A 中所有数的和，

$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a(i,j)$ 为数表 A 中前 $k$ 行 $k$ 列交叉处各数之和.

（Ⅰ）$A_1$ 是“4 阶非负数表”；$A_2$ 不是“4 阶非负数表”.

（Ⅱ）由题意知 $a(i,j)\in\{1,-1\}$，$i=1,2,3,4,5$，$j=1,2,3,4,5$，且数表 A 是“5 阶非负数表”，

所以 $R(s)$（$s=1, 2, 3, 4, 5$）为奇数，且 $R(1)+R(2)+R(3)+R(4)+R(5)\ge 0$.

不妨设 $R(1)\ge R(2)\ge R(3)\ge R(4)\ge R(5)$.

① 当 $R(3)\ge 0$ 时，因为 $R(3)$ 为奇数，所以 $R(3)\ge 1$.

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge 3R(3)\ge 3$.

② 当 $R(3)<0$ 时，因为 $R(3)$ 为奇数，所以 $R(3)\le -1$.

所以 $R(4)+R(5)\le 2R(3)\le -2$.

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge -R(4)-R(5)\ge 2$.

又因为 $R(1)$，$R(2)$，$R(3)$ 均为奇数，

所以 $R(1)+R(2)+R(3)\ge 3$.

（Ⅲ）（1）先证明数表 A 中存在 $n-1$ 行 $n$ 列（$n=2k$），其所有数的和大于等于 0.

设 $R(i)=\sum_{j=1}^{n}a(i,j)$（$i=1, 2, \cdots, n$），由题意知 $\sum_{i=1}^{n}R(i)\ge 0$.

不妨设 $R(1)\ge R(2)\ge\cdots\ge R(n)$.

由于 $n\sum_{i=1}^{n-1}R(i)-(n-1)\sum_{i=1}^{n}R(i)=\sum_{i=1}^{n-1}R(i)-(n-1)R(n)=\sum_{i=1}^{n-1}[R(i)-R(n)]\ge 0$，

所以 $\sum_{i=1}^{n-1}R(i)\ge\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}R(i)\ge 0$.

（2）由（1）及题意不妨设数表 A 前 $n-1$ 行 $n$ 列（$n=2k$），其所有数的和大