天津市耀华中学 2023 届高三年级第三次月考

数学试卷

本试卷分第 I 卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共 150 分．考试用时 120 分钟．

第 I 卷（选择题　共 45 分）

一、选择题（本大题共 9 小题，每小题 5 分，共 45 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．将答案填在规定位置）

1. 设集 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$.集合 $B=\{x \mid x^2-x-2<0\}$.则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】解不等式得到集合 B，再利用集合的交集求解.

【详解】$B=\{x \mid x^2-x-2<0\}=\{x \mid (x-2)(x+1)<0\}=\{x \mid -1<x<2\}$

又 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$

故选：B

2. 在△ABC 中，“$\sin A<\sin B$”是“$A<B$”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

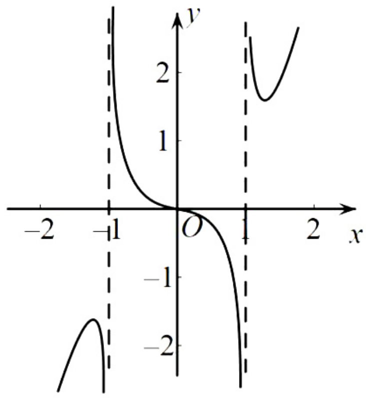
【解析】

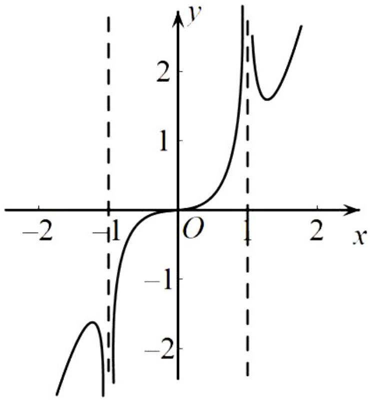
【分析】先利用大角对大边得到 $a<b$，进而利用正弦定理将边边关系得到 $\sin A<\sin B$，即证明了必要性，再同理得到充分性.

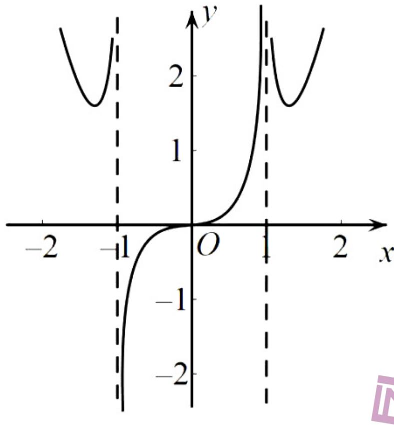
【详解】在三角形中，若 $A<B$，则边 $a<b$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin A<\sin B$．若 $\sin A<\sin B$，则由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $a<b$，根据大边对大角，可知 $A<B$，即 $\sin A<\sin B$ 是 $A<B$ 的充要条件．故选 C.

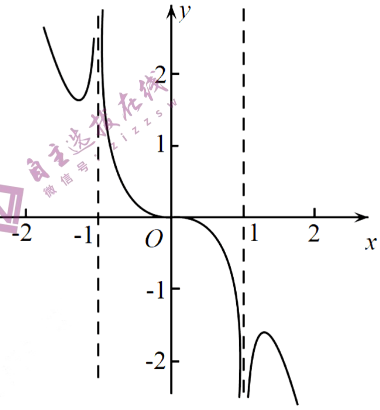
【点睛】本题主要考查充分条件、必要条件的判定以及正弦定理，意在考查学生的逻辑推理能力，属于基础题．解决此题的关键是利用“大边对大角，大角对大边”进行 $\sin A<\sin B$ 与 $A<B$ 的转化.

3. 函数 $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ 的图像大致是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用 $x=2$ 时 $y>0$ 排除选项 D，利用 $x=-2$ 时 $y<0$ 排除选项 C，利用 $x=\dfrac{1}{2}$ 时 $y<0$ 排除选项 B，所以选项 A 正确.全科免费下载公众号《高中僧课堂》

【详解】函数 $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4-1}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq\pm1\}$

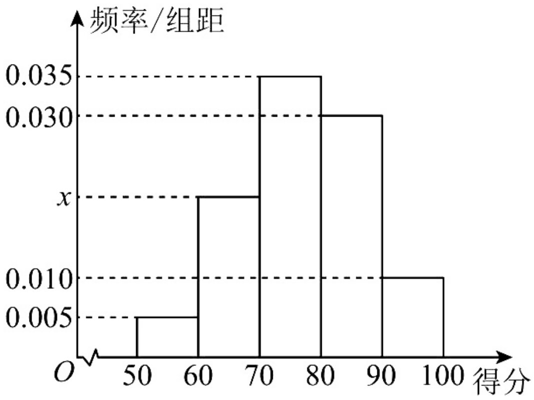
当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{2^3}{\sqrt[3]{2^4-1}}=\dfrac{8}{\sqrt[3]{15}}>0$，可知选项 D 错误；

当 $x=-2$ 时，$y=\dfrac{(-2)^3}{\sqrt[3]{(-2)^4-1}}=\dfrac{-8}{\sqrt[3]{15}}<0$，可知选项 C 错误；

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4-1}}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\sqrt[3]{60}}<0$，可知选项 B 错误，选项 A 正确.

故选：A

4. 2022 年 12 月 4 日是第九个国家宪法日，主题为"学习宣传贯彻党的二十大精神，推动全面贯彻实施宪法"，耀华园结合线上教育教学模式，开展了云升旗，云班会等活动．其中由学生会同学制作了宪法学习问卷，收获了有效答卷 2000 份，先对其得分情况进行了统计，按照$[50,60)$、$[60,70)$、…、$[90,100]$分成 5 组，并绘制了如图所示的频率分布直方图，下列说法不正确的是（　　）



A. 图中x的值为 0.02

B. 由直方图中的数据，可估计 75%分位数是 85

C. 由直方图中的数据，可估计这组数据的平均数为 77

D. 90 分以上将获得优秀，则全校有 20 人获得优秀

【答案】D

【解析】

【分析】根据统计学的有关原理逐项分析.

【详解】对于 A，$\left(0.005+x+0.035+0.030+0.010\right)\times 10=1, \therefore x=0.020$ ，正确；

对于 B，$\because \left(0.005+0.020+0.035\right)\times 10=0.6$，$\left(0.005+0.020+0.035+0.030\right)\times 10=0.9$ ，

$\therefore 75\%$ 分位数$=80+\dfrac{0.75-0.6}{0.3}\times 10=85$ ，正确；

对于 C，平均数$=55\times 0.05+65\times 0.2+75\times 0.35+85\times 0.3+95\times 0.1=77$ ，正确；

对于 D，90 分以上的人数为$2000\times 0.1=200$ ，错误；

故选：D.

5. 已知$\odot M$：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线l：$2x+y+2=0$，P为l上的动点，过点P作$\odot M$的切线PA, PB，切点为A, B，当$|PM|\cdot|AB|$最小时，直线AB的方程为（　　）

A. $2x-y-1=0$　　　B. $2x+y-1=0$　　　C. $2x-y+1=0$　　　D. $2x+y+1=0$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可判断直线与圆相离，根据圆的知识可知，四点 A,P,B,M 共圆，且 $AB\perp MP$，根据 $|PM|\cdot|AB|=4S_{\triangle PAM}=4|PA|$ 可知，当直线 $MP\perp l$ 时，$|PM|\cdot|AB|$ 最小，求出以 MP 为直径的圆的方程，根据圆系的知识即可求出直线 AB 的方程.

【详解】圆的方程可化为 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$，点 M 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2\times1+1+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}>2$，所以直线 l 与圆相离.

依圆的知识可知，四点 A,P,B,M 四点共圆，且 $AB\perp MP$，所以

$|PM|\cdot|AB|=4S_{\triangle PAM}=4\times\frac{1}{2}\times|PA|\times|AM|=4|PA|$，而 $|PA|=\sqrt{|MP|^2-4}$，

当直线 $MP\perp l$ 时，$|MP|_{\min}=\sqrt{5}$，$|PA|_{\min}=1$，此时 $|PM|\cdot|AB|$ 最小.

$\therefore MP: y-1=\frac{1}{2}(x-1)$ 即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\2x+y+2=0\end{cases}$ 解得，$\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$.

所以以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-1)(x+1)+y(y-1)=0$，即 $x^2+y^2-y-1=0$，

两圆的方程相减可得：$2x+y+1=0$，即为直线 AB 的方程.

故选：D.

【点睛】本题主要考查直线与圆，圆与圆的位置关系的应用，以及圆的几何性质的应用，意在考查学生的转化能力和数学运算能力，属于中档题.

6. 设函数 $f(x)=(\sin x+\cos x)^2-\cos 2x$，则下列结论错误的是（　　）

A. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$

B. $f(x)$ 的一个零点为 $x=\frac{\pi}{8}$

C. $f(x)$ 的最小正周期为 π

D. $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 对称

【答案】B

【解析】

【分析】利用三角函数的恒等变形公式化简为“一角一函”的形式，然后利用三角函双 E 图象与性质进行判定.

【详解】$f(x)=(\sin x+\cos x)^2-\cos 2x=1+\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以$f(x)$的最小正周期为$\pi$，$f(x)$的最大值为$\sqrt{2}+1$，C，A正确；当$x=\frac{3\pi}{8}$时，$\sin\left(2\times\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=1$，所以$y=f(x)$的图象关于直线$x=\frac{3\pi}{8}$对称，D正确；因为$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1\neq 0$，所以$x=\frac{\pi}{8}$不是函数$f(x)$的零点，B错误，

故选：B.

7. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点分别是$F_1$，$F_2$，离心率为$e$，过$F_1$的直线交双曲线的左支于$M$，$N$两点，若$\triangle MF_2N$是以$M$为直角顶点的等腰直角三角形，则$e^2$等于（　　）

A. $5-2\sqrt{2}$　　B. $5+2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}-2$

【答案】A

【解析】

【分析】根据双曲线性质设$|MF_1|=m$，则$|MF_2|=m+2a$，$|NF_1|=2a$，$|NF_2|=4a$，计算得到$m=\left(2\sqrt{2}-2\right)a$，根据勾股定理解得答案.

【详解】$\triangle MF_2N$是以M为直角顶点的等腰直角三角形，

设$|MF_1|=m$，则$|MF_2|=m+2a$，$|NF_1|=2a$，$|NF_2|=2a+2a=4a$，

则$|NF_2|=\sqrt{2}|MF_2|$，即$4a=\sqrt{2}(m+2a)$，解得$m=\left(2\sqrt{2}-2\right)a$，

在直角$\triangle MF_1F_2$中：$4c^2=\left[\left(2\sqrt{2}-2\right)a\right]^2+\left(2\sqrt{2}a\right)^2$，

化简得到$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{20-8\sqrt{2}}{4}=5-2\sqrt{2}$.

故选：A.

8. 已知$0.5^x=x$，$\log_{0.5}y=x^y$，$\log_x z=0.5^z$，则（　　）

A. $y<x<z$　　B. $z<x<y$　　C. $x<z<y$　　D. $z<y<x$

【答案】A

【解析】

【分析】将$0.5^x=x$变形为$\log_{0.5}x=x$，然后从对数函数的定义域及单调性考虑，结合指数函数的值域，

得到$0.5<x<1$，进而得到$x<z<1$，$y\in(0.5,1)$，$x<x^{y}$，结合$x=\log_{0.5}x$，$\log_{0.5}y=x^{y}$，得到$\log_{0.5}x<\log_{0.5}y$，$x>y$，求出$y<x<z$.

【详解】要比较$0.5^{x}=x$，$\log_{0.5}y=x^{y}$，$\log_{x}z=0.5^{z}$中的x,y,z大小，

等价于比较$\log_{0.5}x=x$，$\log_{0.5}y=x^{y}$，$\log_{x}z=0.5^{z}$中的x,y,z大小，

$\because x=\log_{0.5}x$，由定义域可知$x>0$，

故$\log_{0.5}x>0=\log_{0.5}1$，

$\because y=\log_{0.5}x$在定义域上单调递减，

$\therefore 0<x<1,0<\log_{0.5}x<1$，

$\therefore 0.5<x<1$，

$\because 0.5^{z}>0$，

$\therefore \log_{x}z>0=\log_{x}1$，

$\because 0.5<x<1$，

$\therefore 0<z<1$，

故$0.5^{z}\in(0,1)$，则$\log_{x}z\in(0,1)$，

$\therefore x<z<1$，

$\log_{0.5}y=x^{y}$，由定义域可知：$y>0$，

又$\because 0.5<x<1$，

$\therefore x^{y}\in(0,1)$，则$\log_{0.5}y\in(0,1)$，

$\therefore y\in(0.5,1)$，故$x<x^{y}$，

$\because x=\log_{0.5}x$，$\log_{0.5}y=x^{y}$，

$\therefore \log_{0.5}x<\log_{0.5}y$，

$\therefore x>y$，

$\therefore y<x<z$.

故选：A.

【点睛】方法点睛：对数比较大小的方法有：

（1）对于真数相同的对数，可利用倒数法加以解决，有时也可把对数转化为指数式进行比较；

（2）当底数与真数都不相同时，一般可选取适当的“媒介”（通常以“0”或“1”为媒介），分别与要比较的数比较大小，从而间接地得出要比较的数的大小关系；

（3）作差（商）比较法是比较两个数值大小的常用方法，即对两值作差（商），看其值与 0 或 1 的关系，从而确定所比两值的大小关系.

9. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，满足 $[f(x)]^3-[f(x)]^2-x^2f(x)+x^2=0$ 对任意的实数 x 都成立，且值域为 $[0,1]$. 设函数 $g(x)=|x-m|-|x-1|$，（$m<1$），若对任意的 $x_1\in(-2,\frac{1}{2})$，存在 $x_2>x_1$，使得 $g(x_2)=f(x_1)$ 成立，则实数 m 的取值范围为（　）

A. $[-6,1)$　　B. $[-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}]$　　C. $[0,1)$　　D. $[-\frac{1}{2},0]$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据函数 $f\left(x\right)$ 满足的关系式及奇偶性，值域，得到 $f\left(x\right)=\begin{cases}1,x<-1\\|x|,-1\le x\le 1\\1,x>1\end{cases}$，再写出 $g(x)=\begin{cases}m-1,x<m\\2x-m-1,m\le x\le 1\\-m+1,x>1\end{cases}$，在同一坐标系中画出两函数图象，结合当 $x>1$ 时，$g\left(x\right)=-m+1\ge 1$ 及 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g\left(x\right)$ 的图象要位于 $f\left(x\right)$ 的下方，得到 $g\left(\frac{1}{2}\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$，求出实数 m 的取值范围.

【详解】$[f(x)]^3-[f(x)]^2-x^2f(x)+x^2=0$ 变形为 $[f^2(x)-x^2][f(x)-1]=0$，

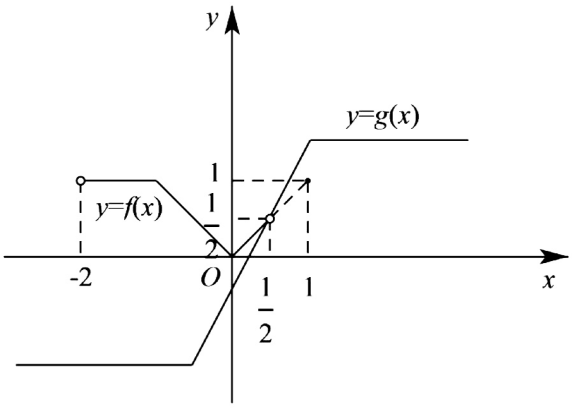
所以 $f(x)=1$ 或 $f^2(x)=x^2$，即 $f(x)=1$ 或 $f(x)=|x|$，

因为 $f\left(x\right)$ 为偶函数，且值域为 $[0,1]$，

所以 $f\left(x\right)=\begin{cases}1,x<-1\\|x|,-1\le x\le 1\\1,x>1\end{cases}$，

因为 $m<1$，所以 $g(x)=|x-m|-|x-1|=\begin{cases}m-1,x<m\\2x-m-1,m\le x\le 1\\-m+1,x>1\end{cases}$，

在同一坐标系中画出两者的函数图象，如下图：



要想满足若对任意的 $x_1 \in (-2,\frac{1}{2})$，存在 $x_2 > x_1$，使得 $g(x_2) = f(x_1)$ 成立，

则当 $x > 1$ 时，$g\left(x\right) = -m+1 \geq 1$，所以 $m \leq 0$，

且 $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g\left(x\right)$ 的图象要位于 $f\left(x\right)$ 的下方，

故只需 $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $-m \leq \frac{1}{2}$，解得：$m \geq -\frac{1}{2}$，

综上：实数 m 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},0]$.

故选：D

【点睛】对于函数恒成立或有解问题，要画出函数图象，对比函数值域，数形结合，列出不等式，求出参数的取值范围.

第II卷（非选择题　共 105 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．将答案填在答题纸相应位置上）

10. 若 $z = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则 $\frac{z}{z\bar{z}-1} =$ ________.

【答案】$-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

【解析】

【分析】代入后利用复数的乘法运算法则计算即可.

【详解】由于 $z = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，所以 $\frac{z}{z\bar{z}-1} = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\left(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)-1} = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{3} = -\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

故答案为：$-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

11. $\left(x^{3}-\dfrac{3}{x^{2}}\right)^{5}$展开式中的常数项为__________.

【答案】-270

【解析】

【分析】写出二项展开式的通项$T_{r+1}=C_5^r\left(x^3\right)^{5-r}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^r$，令$3(5-r)=2r$即可得$r=3$，代入计算可得其常数项.

【详解】由题意可知，其通项为$T_{r+1}=C_5^r\left(x^3\right)^{5-r}\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^r=\left(-3\right)^r C_5^r x^{3(5-r)}\dfrac{1}{x^{2r}}$，

令$3(5-r)=2r$，得$r=3$；

则常数项为$C_5^3\left(x^3\right)^2\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)^3=\left(-3\right)^3 C_5^3=-270$.

故答案为：-270

12. "二十四节气"已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录．我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种．这十二个节气的日影长依次成等差数列．若冬至的日影子长为15.5尺，芒种的日影子长为4.5尺，则雨水、惊蛰、春分、清明的日影长的和是__________尺.

【答案】40

【解析】

【分析】把对应的十二节气分别对应成等差数列的前12项，相当于已知$a_1=15.5$，$a_{12}=4.5$，求解$a_5+a_6+a_7+a_8$.

【详解】设从冬至之日起，小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气的日影长以此成等差数列$\{a_n\}$，设公差为d，则$a_1=15.5$，$a_{12}=4.5$所以$15.5+11d=4.5$，则$d=-1$，所以雨水、惊蛰、春分、清明的日影长的和为

$a_5+a_6+a_7+a_8=11.5+10.5+9.5+8.5=40$

故答案为：40

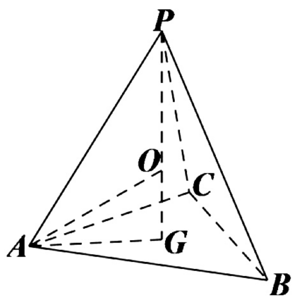
13. 在三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=2\sqrt{5}$，$AB=BC=AC=2\sqrt{3}$，则三棱锥$P-ABC$外接球的体积是______.

【答案】$\frac{125\pi}{6}$

【解析】

【分析】作出图形，取等边$\triangle ABC$的中心G，连接PG，可知三棱锥$P-ABC$外接球球心在直线PG上，设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为R，根据几何关系列出关于R的方程，解出R的值，进而可求得三棱锥$P-ABC$外接球的体积.

【详解】取等边$\triangle ABC$的中心G，连接PG、AG，如下图所示：



$\because PA=PB=PC=2\sqrt{5}$，$AB=BC=AC=2\sqrt{3}$，所以，三棱锥$P-ABC$为正三棱锥，

所以，三棱锥$P-ABC$外接球球心O在直线PG，设该球的半径为R，

由正弦定理得$AG=\dfrac{AB}{2\sin\frac{\pi}{3}}=2$，所以，$PG=\sqrt{PA^2-AG^2}=4$，

由勾股定理得$OA^2=OG^2+AG^2$，即$R^2=|4-R|^2+4$，解得$R=\frac{5}{2}$，

因此，三棱锥$P-ABC$外接球的体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{6}\pi$.

故答案为：$\frac{125\pi}{6}$.

【点睛】本题考查三棱锥外接球体积的计算，要分析出球心的位置，并结合几何关系列等式求解，考查计算能力，属于中等题.

14. 已知正数x,y满足$\dfrac{8}{3x^2+2xy}+\dfrac{3}{xy+2y^2}=1$，则$xy$的最小值是________.

【答案】$\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】根据题意，将等式$\dfrac{8}{3x^2+2xy}+\dfrac{3}{xy+2y^2}=1$化简变形，得到$xy$的表达式，根据表达式特征利用换元法构造函数，求导得出函数单调性即可得出最小值.

【详解】根据题意，由 $\frac{8}{3x^2+2xy}+\frac{3}{xy+2y^2}=1$ 可得 $\frac{8(xy+2y^2)+3(3x^2+2xy)}{(3x^2+2xy)(xy+2y^2)}=1$，

即 $16y^2+9x^2+14xy=3x^3y+8x^2y^2+4xy^3=xy(4y^2+3x^2+8xy)$

所以 $\frac{16y^2+9x^2+14xy}{4y^2+3x^2+8xy}=xy=\frac{16\frac{y^2}{x^2}+9+14\frac{y}{x}}{4\frac{y^2}{x^2}+3+8\frac{y}{x}}$；

又因为 x,y 均是正数，令 $\frac{y}{x}=t\in(0,+\infty)$，则 $xy=f(t)=\frac{16t^2+14t+9}{4t^2+8t+3}$

所以，$f(t)=\frac{16t^2+14t+9}{4t^2+8t+3}=4-\frac{18t+3}{4t^2+8t+3}=4-\frac{1}{\frac{4t^2+8t+3}{18t+3}}$

令 $g(t)=\frac{4t^2+8t+3}{18t+3}$，

则 $g(t)=\frac{2}{9}t+\frac{11}{27}+\frac{\frac{16}{9}}{18t+3}=\frac{2}{9}\left(t+\frac{1}{6}\right)+\frac{\frac{16}{9}}{18t+3}+\frac{10}{27}\geq 2\sqrt{\frac{2}{9}\left(t+\frac{1}{6}\right)\times\frac{\frac{16}{9}}{18t+3}}+\frac{10}{27}=\frac{18}{27}$

当且仅当 $\frac{2}{9}\left(t+\frac{1}{6}\right)=\frac{\frac{16}{9}}{18t+3}$，即 $t=\frac{1}{2}$ 时，等号成立；

所以 $f(t)=4-\frac{1}{\frac{4t^2+8t+3}{18t+3}}\geq 4-\frac{1}{\frac{18}{27}}=\frac{45}{18}=\frac{5}{2}$

所以 $f(t)$ 的最小值为 $f(t)_{\min}=\frac{5}{2}$；

即当 $t=\frac{y}{x}=\frac{1}{2},x=2y=\sqrt{5}$ 时，即 $x=\sqrt{5},y=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，等号成立.

故答案为：$\frac{5}{2}$

【点睛】关键点点睛：根据等式特征可知，利用基本不等式条件不明显，所以首先得出 xy 的表达式，根据 $\frac{16y^2+9x^2+14xy}{4y^2+3x^2+8xy}=xy$ 可利用齐次式特征构造函数，再进行化简凑成基本不等式求解即可.

15. 已知 O 为矩形 $ABCD$ 内一点，满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=5$，$\left|\overrightarrow{OC}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=7$，则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=$__________.

【答案】-4

【解析】

【分析】根据平面向量的线性运算、数量积的运算律以及余弦定理可求出结果.

【详解】$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}>$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}$

$=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2}$

$=\dfrac{25+16-49}{2}$

$=-4$.

故答案为：-4.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．将答案填在答题纸上）

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对边分别为 a，b，c，$(\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\sin B$.

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若 $a=3b$，求 $\cos(2B+C)$ 的值.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{\pi}{3}$；（Ⅱ）$-\dfrac{1}{7}$.

【解析】

【分析】（Ⅰ）利用正弦定理的边角互化以及余弦定理即可求解.

（Ⅱ）利用正弦定理的边角互化可得$\sin A=3\sin B$，再由$A+B=\frac{2}{3}\pi$求出$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$，再利用两角和的余弦公式即可求解.

【详解】（Ⅰ）$\because (\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\sin B$

$\therefore$由正弦定理得$(a-b)^2=c^2-ab$，即$a^2+b^2-c^2=ab$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$,

又$\because C\in(0,\pi)$

$\therefore C=\frac{\pi}{3}$;

（Ⅱ）$\because a=3b$，$\therefore$由正弦定理得$\sin A=3\sin B$，

$\because A+B=\frac{2}{3}\pi$，$\therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi-B\right)=3\sin B$，

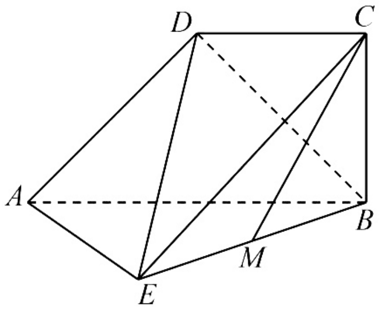
$\therefore \tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$,

$\therefore B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\therefore \sin B=\frac{\sqrt{21}}{14},\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,

$\therefore \sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{5\sqrt{3}}{14},\cos 2B=\frac{11}{14}$

$\therefore \cos(2B+C)=\cos 2B\cos C-\sin 2B\sin C=-\frac{1}{7}$

17. 如图，在四棱锥$E-ABCD$中，平面$ABCD\perp$平面ABE，$AB//DC$，$AB\perp BC$，$AB=2BC=2CD=2$，$AE=BE=\sqrt{3}$，点M为BE的中点.



（1）求证：CM // 平面ADE；

（2）求平面EBD与平面BDC夹角的正弦值；

（3）在线段AD上是否存在一点N，使直线MD与平面BEN所成的角正弦值为$\frac{4\sqrt{6}}{21}$，若存在求出AN

的长，若不存在说明理由.

【答案】（1）见解析　　（2）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

（3）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】（1）由线面平行的判定定理证明

（2）建立空间直角坐标系，由空间向量求解

（3）待定系数法表示 N 点坐标，由空间向量求解

【小问 1 详解】

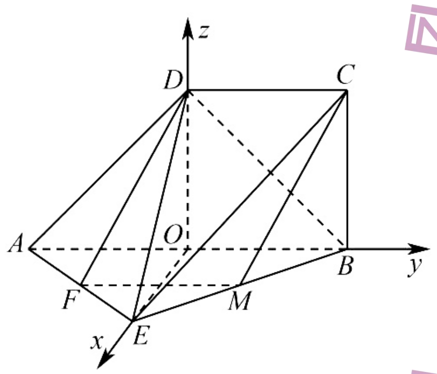
取 AE 中点 F，连接 DF,MF

$\because M$ 是 BE 的中点，$\therefore MF//AB$，$MF=\frac{1}{2}AB$，

故 $MF//CD$，$MF=CD$，四边形 $MFDC$ 为平行四边形，

$\therefore MC//FD$，而 $MC\not\subset$ 平面 ADE，$FD\subset$ 平面 ADE，

$\therefore CM$ // 平面 ADE



【小问 2 详解】

因为平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，$AB\perp BC$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABE=AB$，所以 $BC\perp$ 平面 ABE，

取 AB 中点 O，连接 OD,OE，易得 $DO\perp$ 平面 ABE，$OB\perp OE$

以 O 为原点，OE,OB,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系

则有 $E(\sqrt{2},0,0),B(0,1,0),C(0,1,1),D(0,0,1)$，

$\overrightarrow{BD}=(0,-1,1),\overrightarrow{BE}=(\sqrt{2},-1,0)$，

设平面 EBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-y+z=0\\ \sqrt{2}x-y=0\end{cases}$，

取$x=1$，得$\overrightarrow{n_1}=(1,\sqrt{2},\sqrt{2})$，

易知平面BDC的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(1,0,0)$，

则$\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+2+2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

故平面EBD与平面BDC夹角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

【小问3详解】

$A(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$，设$\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AD}=(0,t,t)$，$t\in[0,1]$

则$N(0,t-1,t)$，$\overrightarrow{BN}=(0,t-2,t)$，$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{2},-1,0)$，

设平面BEN的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0\end{cases}$得$\begin{cases}(t-2)y+tz=0\\ \sqrt{2}x-y=0\end{cases}$，

得$\vec{n}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,t,2-t)$，而$\overrightarrow{MD}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2},1)$，

故$\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{MD}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{MD}||\vec{n}|}=\dfrac{|-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}t+2-t|}{\sqrt{\frac{1}{2}t^2+t^2+(2-t)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+1}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{21}$，

$16t^2-34t+13=0$，解得$t=\dfrac{1}{2}$或$t=\dfrac{13}{8}$（舍去）

故$AN=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

18. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，上顶点为$B$，离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，且过点$F$且与$x$轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\dfrac{8}{3}$．

（1）求椭圆的标准方程；

（2）直线$l:y=kx+m$与椭圆有唯一的公共点M，与y轴的正半轴交于点N，过N与BF垂直的直线

交 x 轴于点 P .若 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BF}=\dfrac{45}{8m}$，求直线 l 的方程.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）$y=\dfrac{\sqrt{5}}{4}x+\dfrac{\sqrt{109}}{4}$

【解析】

【分析】（1）通过通径和离心率联立方程可得；（2）分别计算出 M,P,B,F 的坐标，再根据直线与椭圆相切求出 m,k 之间的关系式，代入 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BF}=\dfrac{45}{8m}$ 可求得 k,m ,进而求出直线方程.

【小问 1 详解】

$F(c,0)$，则过 F 的垂线为 $x=c$，联立椭圆方程得：$\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\therefore y^2=b^2-\dfrac{b^2c^2}{a^2},\therefore y=\pm\dfrac{b^2}{a}$

弦长=$\dfrac{8}{3}=\dfrac{2b^2}{a}$, 又 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{c}{a}$，联立 $a^2=b^2+c^2$ 解之得：$a=3,b=2,c=\sqrt{5}$

所以，椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【小问 2 详解】

由（1）知 $B(0,2),F(\sqrt{5},0),\therefore k_{BF}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\therefore k_{NP}=\dfrac{\sqrt{5}}{2},N(0,m)(m>0)$，

$\therefore l_{NP}:y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+m,\therefore P\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}m,0\right)$

将直线与椭圆联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow 4x^2+9(kx+m)^2-36=0$

整理得：$(9k^2+4)x^2+18kmx+9m^2-36=0$

相切 $\therefore(18km)^2-4(9k^2+4)(9m^2-36)=0,\therefore m^2=9k^2+4.$

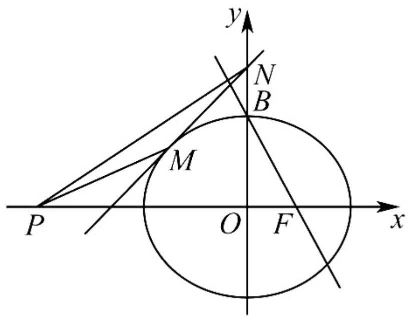
代入 $(9k^2+4)x^2+18kmx+9m^2-36=0$ 解得：$x_M=-\dfrac{9k}{m}$

$\therefore M\left(-\dfrac{9k}{m},m-\dfrac{9k^2}{m}\right)$

$\therefore \overrightarrow{BF}=\left(\sqrt{5},-2\right),\overrightarrow{MP}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}m+\dfrac{9k}{m},\dfrac{9k^2}{m}-m\right)$

$\therefore \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{5}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}m+\dfrac{9k}{m}\right)-2\left(\dfrac{9k^2}{m}-m\right)=\dfrac{9\sqrt{5}k}{m}-\dfrac{18k^2}{m}=\dfrac{45}{8m}$

解之：$k=\dfrac{\sqrt{5}}{4},m=\dfrac{\sqrt{109}}{4},\therefore l:y=\dfrac{\sqrt{5}}{4}x+\dfrac{\sqrt{109}}{4}$



【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题．

19. 已知数列$\left\{a_n\right\}$是公差为 2 的等差数列，其前 8 项的和为 64．数列$\left\{b_n\right\}$是公比大于 0 的等比数列，$b_1=3$，$b_3-b_2=18$．

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$和$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\left(-1\right)^n a_n^2$，$n\in \mathrm{N}^*$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前$2n$项和$S_{2n}$；

（3）设$d_n=\dfrac{2}{3}b_n-n^2$，记$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{d_i}$，证明：当$n\in \mathbf{N}^*$时，$2T_n+\dfrac{3}{2b_n-\left(\dfrac{a_n+3}{2}\right)^2}\le\dfrac{7}{2}$．

【答案】（1）$a_n=2n-1$；$b_n=3^n$

（2）$8n^2$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据等差、等比数列的通项公式、前n项和公式进行计算可求出结果；

（2）根据$c_{2n-1}+c_{2n}=\left(-1\right)^{2n-1}\cdot\left[2\left(2n-1\right)-1\right]^2+\left(-1\right)^{2n}\cdot\left(4n-1\right)^2=8(2n-1)$进行并项求和可求出结果；

（3）转化为证明$T_n \le \frac{7}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^n-(n+1)^2}$，根据$\frac{1}{d_n}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-n^2}-\frac{1}{2\cdot 3^n-(n+1)^2}\right)$进行裂项求和可证明不等式成立.

【小问 1 详解】

因为$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，且$S_8=64$，

所以$8a_1+\frac{8\times 7}{2}\times 2=64$，解得$a_1=1$，

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$；

设等比数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$，

因为$b_1=3$，$b_3-b_2=18$，所以$3q^2-3q=18$，即$q^2-q-6=0$，

解得$q=-2$（舍去）或$q=3$，

所以$b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$.

【小问 2 详解】

由（1）得$c_n=(-1)^n a_n^2=(-1)^n\cdot(2n-1)^2$，

则$c_{2n-1}+c_{2n}=(-1)^{2n-1}\cdot\left[2(2n-1)-1\right]^2+(-1)^{2n}\cdot(4n-1)^2$

$=-(-1)^{2n}\cdot(4n-3)^2+(-1)^{2n}\cdot(4n-1)^2=(4n-1)^2-(4n-3)^2=16n-8=8(2n-1)$，

$S_{2n}=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{2n-1}+c_{2n})$

$=8\left[1+3+5+\cdots+(2n-1)\right]=8\times\frac{n\left[1+(2n-1)\right]}{2}=8n^2$.

【小问 3 详解】

由（1）可知：$d_n=\frac{2}{3}b_n-n^2=2\cdot 3^{n-1}-n^2$．又$b_n=3^n$，$a_n=2n-1$，

所以要证明原不等式成立，只需证明：$T_n\le\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^n-(n+1)^2}$成立.

当$n=1$时，左边=1，右边=1，左边=右边.

当$n\ge 2$时，因为$\frac{1}{d_n}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-n^2}=\frac{\left[2\cdot 3^n-(n+1)^2\right]}{(2\cdot 3^{n-1}-n^2)\left[2\cdot 3^n-(n+1)^2\right]}$

$$=\frac{2\cdot 3^{n}-\left(n+1\right)^{2}}{4\cdot 3^{n-1}-\left(2n+1\right)}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-n^{2}}-\frac{1}{2\cdot 3^{n}-\left(n+1\right)^{2}}\right],$$

因为 $2\times 3^{n}-(n+1)^{2}=2(1+2)^{n}-(n+1)^{2}$

$=2(\mathrm{C}_{n}^{0}+\mathrm{C}_{n}^{1}\cdot 2+\mathrm{C}_{n}^{2}\cdot 2^{2}+\cdots+\mathrm{C}_{n}^{n}\cdot 2^{n})-(n^{2}+2n+1)$

$\geq 2(\mathrm{C}_{n}^{0}+\mathrm{C}_{n}^{1}\cdot 2+\mathrm{C}_{n}^{2}\cdot 2^{2})-(n^{2}+2n+1)=2(1+2n+2n^{2}-2n)-(n^{2}+2n+1)$

$=3n^{2}-2n+1=n(3-2n)+1>0$，

所以 $2\times 3^{n}-(n+1)^{2}>0$，

因为 $4\cdot 3^{n-1}-(2n+1)=4(1+2)^{n-1}-(2n+1)=4(\mathrm{C}_{n-1}^{0}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}\cdot 2+\cdots+\mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\cdot 2^{n-1})-(2n+1)$

$\geq 4(\mathrm{C}_{n-1}^{0}+\mathrm{C}_{n-1}^{1}\cdot 2)-(2n+1)=6n-5>0$，

所以 $4\cdot 3^{n-1}-(2n+1)>0$，

因为 $\left(n+1\right)^{2}-\frac{3}{2}\left(2n+1\right)=n^{2}-n-\frac{1}{2}>0$，所以 $2n+1<\frac{2}{3}(n+1)^{2}$，

所以 $0<\frac{2\cdot 3^{n}-\left(n+1\right)^{2}}{4\cdot 3^{n-1}-\left(2n+1\right)}<\frac{2\cdot 3^{n}-(n+1)^{2}}{\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 3^{n}-\frac{2}{3}(n+1)^{2}}=\frac{2}{3}$，

即 $0<\frac{2\cdot 3^{n}-\left(n+1\right)^{2}}{4\cdot 3^{n-1}-\left(2n+1\right)}<\frac{3}{2}$．

所以当 $n\geq 2$ 时，有 $\frac{1}{d_{n}}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-n^{2}}-\frac{1}{2\cdot 3^{n}-\left(n+1\right)^{2}}\right)$，

所以 $\frac{1}{d_{1}}+\frac{1}{d_{2}}+\cdots+\frac{1}{d_{n}}<1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{38}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}-n^{2}}-\frac{1}{2\cdot 3^{n}-(n+1)^{2}}\right)$

$=1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n}-(n+1)^{2}}\right)$

即 $\frac{1}{d_{1}}+\frac{1}{d_{2}}+\cdots+\frac{1}{d_{n}}<1+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n}-(n+1)^{2}}\right)$，

所以 $T_{n}<\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^{n}-(n+1)^{2}}$，

于是，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$T_n\le\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot3^n-(n+1)^2}$ 成立.

综上所述：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2T_n+\frac{3}{2b_n-\left(\frac{a_n+3}{2}\right)^2}\le\frac{7}{2}$.

【点睛】关键点点睛：通过放缩得到 $\frac{1}{d_n}\le\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-n^2}-\frac{1}{2\cdot3^n-(n+1)^2}\right)$，并利用它进行裂项求和是解题关键.

20. 已知函数 $f(x)=\ln(ax)-e^{x-1}(a>0)$ 有最大值 -2，

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $y=\ln x$ 与 $y=e^{x-m}$ 有公切线 $y=k(x+1)+\ln a$，求 $k(m-k)$ 的值.

（3）若有 $\ln x\le k(x+1)+\ln a\le e^{x-m}$，求 $k(m-k)$ 的最大值.

【答案】（1）$a=e^{-1}$

（2）$k(m-k)=1$

（3）1

【解析】

【分析】（1）求导根据导函数的正负确定原函数的单调性，进而根据最大值为 -2 求解即可；

（2）分别对两函数求导，设切点，并结合导数的几何意义列式，分别得出 $k=-\ln k$ 与 $\ln k=\frac{1}{k}-m$ 即可求解；

（3）转化可得 $\left(e^{x-m}-kx-k+1\right)_{\min}\ge0$ 在 R 上恒成立，构造函数 $u(x)=e^{x-m}-kx-k+1(x\in R)$，求导分情况讨论 k 的范围，从而分析 $u(x)$ 的最小值可得 $mk\le1-k\ln k$；同理 $(\ln x-kx-k+1)_{\max}\le0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，构造 $v(x)=\ln x-kx-k+1(x>0)$，求导分析最大值可得 $-\ln k\le k$，从而得到 $mk-k^2\le1$ 即可.

【小问 1 详解】

由题意 $f'(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$ 为减函数，且 $f'(1)=0$，故在 $(0,1)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(1)=-2$，即 $\ln a-1=-2$，解得 $a=e^{-1}$，

经检验，$a=\mathrm{e}^{-1}$ 符合题意．故 $a=\mathrm{e}^{-1}$．

【小问 2 详解】

由（1）$\ln a=-1$，故 $f(x)=\ln x-\mathrm{e}^{x-1}-1$，公切线公切线 $y=kx+k-1$.

设 $y=\ln x$ 上切点为 $(x_1,\ln x_1)$，则 $k=\dfrac{1}{x_1}$，

代入切线 $\ln x_1=k(x_1+1)-1=\dfrac{1}{x_1}(x_1+1)-1=\dfrac{1}{x_1}$，解得 $k=-\ln k$ ①.

设 $y=\mathrm{e}^{x-m}$ 上切点为 (x_2,e^{x_2-m})，$k=\mathrm{e}^{x_2-m}$，

切线方程 $y-\mathrm{e}^{x_2-m}=\mathrm{e}^{x_2-m}(x-x_2)$，$y=\mathrm{e}^{x_2-m}x+\mathrm{e}^{x_2-m}(1-x_2)$

由于公切线 $\begin{cases}k=\mathrm{e}^{x_2-m}\\ \mathrm{e}^{x_2-m}(1-x_2)=k-1\end{cases}$

解得 $1-x_2=\dfrac{k-1}{k}=1-\dfrac{1}{k}$，$x_2=\dfrac{1}{k}$

因此代回，可得 $k=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}-m}$，$\ln k=\dfrac{1}{k}-m$ ②再代入①，得 $-k=\dfrac{1}{k}-m$，$k(m-k)=1$

【小问 3 详解】

对于 $\mathrm{e}^{x-m}\ge kx+k-1$，可得不等式 $\mathrm{e}^{x-m}-kx-k+1\ge 0$ 在 R 上恒成立，

即 $\left(\mathrm{e}^{x-m}-kx-k+1\right)_{\min}\ge 0$ 在 R 上恒成立，

设 $u(x)=\mathrm{e}^{x-m}-kx-k+1(x\in\mathrm{R})$，则 $u'(x)=\mathrm{e}^{x-m}-k$，

若 $k\le 0$，则 $u'(x)>0$，函数 $u(x)$ 在 R 上单调递增，

且 $u(x)=\mathrm{e}^{x-m}-kx-k+1>0$，符合题意；

若 $k>0$，令 $u'(x)<0\Rightarrow x<m+\ln k$，令 $u'(x)>0\Rightarrow x>m+\ln k$，

所以 $u(x)$ 在 $(-\infty,m+\ln k)$ 上单调递减，在 $(m+\ln k,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $u(x)_{\min}=u(m+\ln k)=-mk-k\ln k+1$，

由 $u(x)_{\min}\ge 0$，得 $-mk-k\ln k+1\ge 0$，即 $mk\le 1-k\ln k$ ①；

对于 $kx+k-1\ge \ln x$，可得不等式 $\ln x-kx-k+1\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即 $(\ln x-kx-k+1)_{\max}\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $v(x)=\ln x-kx-k+1(x>0)$，则 $v'(x)=\frac{1}{x}-k$，

若 $k\le 0$，则 $v(1)=1-2k>0$，不符合题意；

若 $k>0$，令 $v'(x)>0\Rightarrow 0<x<\frac{1}{k}$，令 $v'(x)<0\Rightarrow x>\frac{1}{k}$，

所以 $v(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $v(x)_{\max}=v\left(\frac{1}{k}\right)=-\ln k-k$，

由 $v(x)_{\max}\le 0$，得 $-\ln k-k\le 0$，即 $-\ln k\le k$ ②.

当 $k>0$ 时，由①②得，$mk-k^2\le 1-k\ln k-k^2\le 1+k^2-k^2=1$，即 $mk-k^2\le 1$，

设 $h(k)=\ln k+k$，则 $h\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=-2+\mathrm{e}^{-2}<0$，$h(1)=1>0$，

故 $h(k)$ 存在零点 k_0，故 $mk-k^2\le 1$

当且仅当 $k=k_0$，$m=\frac{1-k_0\ln k_0}{k_0}$ 时等号成立.

综上，$mk-k^2$ 的最大值为 1.

【点睛】本题主要考查了根据导数的几何意义解决切线的问题，同时也考查了构造函数解决不等式恒成立的问题. 需要根据题意将不等式转化到一边，构造函数，求导分情况讨论分析函数的最值，并结合前后问的关系推导. 属于难题.