

# 浙江省百校起点24届调研测试

## 高三数学考试

2023.9

### 注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容: 高考全部内容。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{x | x > 1\}$ ,  $N = \{x | -1 < 3x - 1 < 8\}$ , 则  $M \cap N =$

- A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 3)$                       C.  $(1, +\infty)$                       D.  $(3, +\infty)$

2. 若数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ , 则

- A. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $\frac{1}{4}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列  
B. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{4}$ , 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列  
C. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{4}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列  
D. 数列  $\{a_n + a_{n+1}\}$  是首项为  $-\frac{1}{2}$ , 公比为  $-\frac{1}{2}$  的等比数列

3. 已知复数  $z = \frac{10 + 5i}{2 - i}$ , 则  $i\bar{z}$  在复平面内对应的点位于

- A. 第一象限                      B. 第二象限                      C. 第三象限                      D. 第四象限

4.  $(2x - y)^5$  的展开式中,  $x^2y^3$  的系数为

- A. -10                      B. 10                      C. -40                      D. 40

5. 牛皮鼓, 又称堂鼓、喜庆鼓, 多用于江南祠堂内婚嫁迎娶和迎新年等。牛皮鼓的制作工艺考究, 有数十道工序, 包括处理牛皮、刨制鼓腔、蒙皮、拉皮、钉钉, 每道工序都考验着手艺人的技艺和耐心。如图所示的牛皮鼓的鼓面直径为 50cm, 鼓身高度为 60cm, 用平行于鼓面的平面截牛皮鼓, 所得截面圆的最大直径为 60cm, 若将该牛皮鼓看成由两个相同的圆台拼接而成, 忽略鼓面与鼓身的厚度, 则该牛皮鼓的体积为



- A.  $22750\pi\text{cm}^3$                       B.  $23750\pi\text{cm}^3$                       C.  $45500\pi\text{cm}^3$                       D.  $47500\pi\text{cm}^3$

6. 若  $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$ , 则

- A.  $a > c > b$                       B.  $a > b > c$                       C.  $b > c > a$                       D.  $b > a > c$

7. 设曲线  $y = x^3 - 2x^2 + 1$  在  $x = k$  处的切线为  $l$ , 若  $l$  的倾斜角小于  $135^\circ$ , 则  $k$  的取值范围是

- A.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$   
C.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$                       D.  $(-\infty, 0] \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$

8. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  在  $C$  上, 且  $PF_1 \perp F_1F_2$ , 直线  $PF_2$  与  $C$

交于另一点  $Q$ , 与  $y$  轴交于点  $M$ , 若  $\overline{MF_2} = 2\overline{F_2Q}$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{3\sqrt{3}}{7}$                       B.  $\frac{4}{7}$                       C.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。公众号浙江省高中数学在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 则

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$                       B.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{5\pi}{4}$  对称  
C.  $f(x) + f(-x) = \sqrt{2} \cos x$                       D.  $f(x)$  的图象关于点  $\left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$  对称

10. 有一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , 其中任何两个数都不相等, 现在删去其中一个数据, 得到一组新数据, 则

下列判断正确的是

- A. 新数据的极差可能等于原数据的极差  
B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数  
C. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的方差大于原数据的方差  
D. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的 20% 分位数小于原数据的 20% 分位数

11. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = xf(y) + yf(x)$ , 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $g(x)$  满足

$g(x+1) = (x+1)(x^2 + 2x)$ , 则

- A.  $f(x)$  不是奇函数                      B.  $f(x)$  既是奇函数又是偶函数  
C.  $g(x)$  是奇函数                      D.  $g(x)$  既不是奇函数又不是偶函数

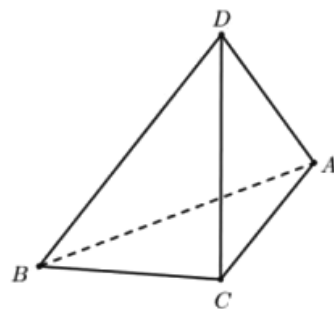
12. 如图, 在三棱锥  $D-ABC$  中, 平面  $ABC \perp$  平面  $ABD$ ,  $AB = AC = BC = BD = 3, AD = 2$ , 则

- A. 三棱锥  $D-ABC$  的体积为  $\sqrt{6}$

B. 点  $C$  到直线  $AD$  的距离为  $\frac{\sqrt{34}}{2}$

C. 二面角  $B-AD-C$  的正切值为  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

D. 三棱锥  $D-ABC$  外接球的球心到平面  $ABD$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若双曲线的焦距为 6，实轴长为 2，则该双曲线的虚轴长为\_\_\_\_\_.

14. 在矩形  $ABCD$  中， $O$  为对角线的交点， $E$  为  $BC$  上一点，且向量  $\overrightarrow{AE}$  在向量  $\overrightarrow{AD}$  上的投影向量为

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{OE} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AD}$ , 则  $\lambda - \mu =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知圆  $M$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  内切，且圆  $M$  与直线  $x = 2$  相切，则圆  $M$  的圆心的轨迹方程为\_\_\_\_\_.

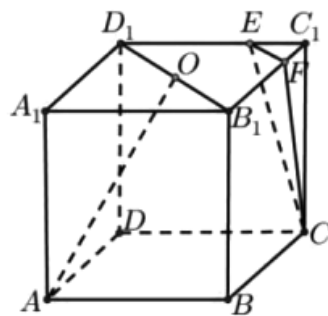
16. 已知  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则当  $\tan 2\theta - \tan \theta$  取得最大值时,  $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} =$ \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $O$  为  $B_1D_1$  的中点， $\overrightarrow{ED_1} = 2\overrightarrow{C_1E}$ ,  $\overrightarrow{FB_1} = 2\overrightarrow{C_1F}$ .

(1) 证明:  $B_1D_1 \parallel$  平面  $CEF$ .

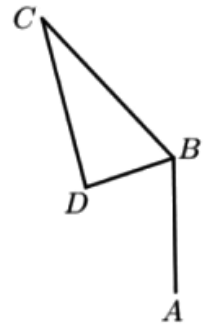
(2) 求直线  $AO$  与平面  $CEF$  所成角的正弦值的平方.



18. (12分) 天门山, 古称嵩梁山, 位于湖南省张家界市永定区大庸中路11号, 属武陵山脉向东进入洞庭湖平原的余脉. 为了测量天门山的海拔, 某人站在海拔600米的点 $A$ 处, 他让无人机从点 $A$ 起飞, 垂直向上飞行400米到达点 $B$ 处, 测得天门山的最高点 $C$ 处的仰角为 $45^\circ$ , 他遥控无人机从点 $B$ 处移动到点 $D$ 处( $BD$ 平行于地平面), 已知 $B$ 与 $D$ 之间的距离为518米, 从点 $D$ 处测得天门山的最高点 $C$ 处的仰角为 $\alpha$  ( $\tan \alpha = 2$ ).

(1) 设平面 $\beta$ 过 $BD$ 且平行于地平面, 点 $C$ 到平面 $\beta$ 的距离为 $h$ 米, 求 $BC$ 与 $CD$ 的长 (用 $h$ 表示);

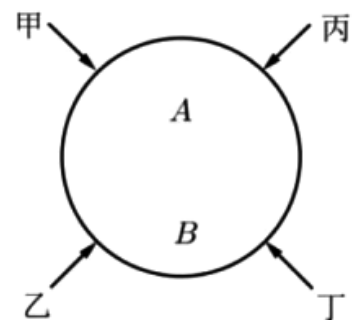
(2) 已知 $\cos \angle BCD = \frac{9\sqrt{10}}{40}$ , 求天门山的海拔.



19. (12分) 艾伦·麦席森·图灵提出的图灵测试, 指测试者与被测试者在隔开的情况下, 通过一些装置 (如键盘) 向被测试者随意提问. (公众号浙江省高中数学) 已知在某一轮图灵测试中有甲、乙、丙、丁4名测试者, 每名测试者向一台机器 (记为 $A$ ) 和一个人 (记为 $B$ ) 各提出一个问题, 并根据机器 $A$ 和人的作答来判断谁是机器, 若机器 $A$ 能让至少一半的测试者产生误判, 则机器 $A$ 通过本轮的图灵测试. 假设每名测试者提问相互独立, 且甲、乙、丙、丁四人之间的提问互不相同, 而每名测试者有60%的可能性会向 $A$ 和 $B$ 问同一个题. 当同一名测试者提出的两个问题相同时, 机器 $A$ 被误判的可能性为10%, 当同一名测试者提的两个问题不相同, 机器 $A$ 被误判的可能性为35%.

(1) 当回答一名测试者的问题时, 求机器 $A$ 被误判的概率;

(2) 按现有设置程序, 求机器 $A$ 通过本轮图灵测试的概率.



20. (12分) 已知  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $a_1 = 1, S_{n+1} + S_n = (n+1)^2$ .

(1) 证明:  $a_{n+1} + a_n = 2n + 1$ .

(2) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

(3) 若  $b_n = \frac{1-a_n}{2^{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

21. (12分) 已知抛物线  $C: y^2 = 2px$  经过点  $(2, -2\sqrt{6})$ , 直线  $l_1: y = kx + m (km \neq 0)$  与  $C$  交于  $A, B$  两点 (异于坐标原点  $O$ ).

(1) 若  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ , 证明: 直线  $l_1$  过定点.

(2) 已知  $k = 2$ , 直线  $l_2$  在直线  $l_1$  的右侧,  $l_1 \parallel l_2$ ,  $l_1$  与  $l_2$  之间的距离  $d = \sqrt{5}$ ,  $l_2$  交  $C$  于  $M, N$  两点, 试问是否存在  $m$ , 使得  $|MN| - |AB| = 10$ ? 若存在, 求  $m$  的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12分) 已知函数  $f(x) = \cos ax + \frac{1}{2}x^2 - 1$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $x=0$  是  $f(x)$  的极大值点, 求  $a$  的取值范围.