

2~2023 学年度第二学期期末质量调研

2023.6

高一数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

B C C A C B D C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BC 10. ACD 11. ABD 12. BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 16; 14. $\frac{26}{3}$; 15. 9000 ; 16. $[\sqrt{3}, +\infty)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=4$ ， $AC=6$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ ， $\overline{BC} = 4\overline{BD}$ ， $\overline{AC} = 3\overline{EC}$ 。

(1) 用 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 表示 $\overline{DE}$ ；

(2) 求 $\overline{DE} \cdot \overline{BC}$ 的值。

解：(1) 因为 $\overline{BC} = 4\overline{BD}$ ，所以

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{BC} = \overline{AB} + \frac{1}{4}(\overline{AC} - \overline{AB})$$

,

因为 $\overline{AC} = 3\overline{CE}$ ，所以 $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AC}$ ，

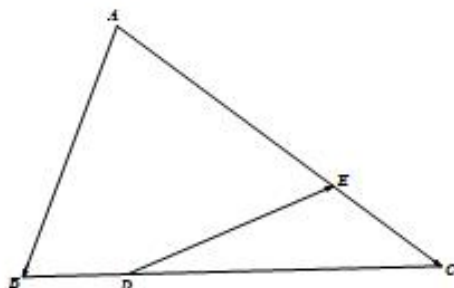
所以 $\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{AC} - \left(\frac{1}{4}\overline{AC} + \frac{3}{4}\overline{AB}\right) = -\frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{5}{12}\overline{AC}$ ；.....5 分

(2)

$$\overline{DE} \cdot \overline{BC} = \left(-\frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{5}{12}\overline{AC}\right) \cdot (-\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{3}{4}\overline{AB}^2 + \frac{5}{12}\overline{AC}^2 - \frac{14}{12}\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

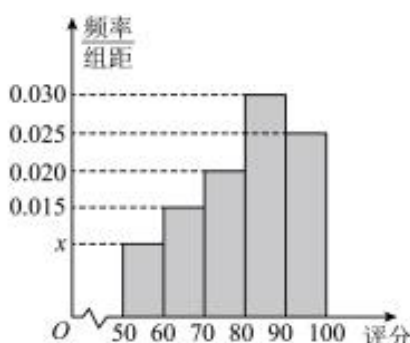
$$= \frac{3}{4} \times 4^2 + \frac{5}{12} \times 6^2 - \frac{14}{12} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 13,$$

即 $\overline{DE} \cdot \overline{BC}$ 的值为 13。.....10 分



18. 为丰富学生的学习生活，某高中开设了“校本课程”。为了解学生对“校本课程”工作的认

可程度，学校随机调查了 600 名学生。根据这 600 名学生对“校本课程”工作认可程度给出的评分，分成 $[50,60)$ ， $[60,70)$ ， $[70,80)$ ， $[80,90)$ ， $[90,100]$ 五组，得到如图所示的频率分布直方图。



- (1) 求直方图中 x 的值和第 60 百分位数；
- (2) 为了解部分学生给“校本课程”工作评分较低的原因，学校从评分低于 80 分的学生中用分层抽样的方法随机选取 30 人进行座谈，求应选取评分在 $[60,70)$ 的学生人数；
- (3) 若学生认可系数 $\left(\text{认可系数} = \frac{\text{认可程度平均分}}{100} \right)$ 不低于 0.85，“校本课程”工作按原方案继续实施，否则需进一步整改。根据你所学的统计知识，结合认可系数，判断“校本课程”工作是否需要进一步整改，并说明理由。

解：(1) 由图可知： $10 \times (x + 0.015 + 0.02 + 0.03 + 0.025) = 1$ ，

解得 $x = 0.01$ 2 分

因为， $[50,80)$ 内的频率为 $0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45 < 0.6$ ， $[50,90)$ 内的频率为

$0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.3 = 0.75 > 0.6$ ，

所以，第 60 百分位数位于区间 $[80,90)$ 内，设为 m ，

则 $m = 80 + \frac{0.6 - 0.45}{0.3} \times (90 - 80) = 85$ ，

所以，第 60 百分位数为 85. 5 分

(2) 低于 80 分的学生中三组学生的人数比例为 $0.1 : 0.15 : 0.2 = 2 : 3 : 4$ ，

则应选取评分在 $[60,70)$ 的学生人数为： $30 \times \frac{3}{2+3+4} = 10$ (人). 8 分

(3) 由图可知，认可程度平均分为：

$\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.25 = 79.5$ ， 10 分

$< 0.85 \times 100 = 85$

所以,“校本课程”工作需要进一步整改.12分

19. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $a\cos C - \frac{1}{2}c = b$.

(1)求 A ;

(2)点 D 在线段 BC 上, $AD \perp AC$, $\frac{BD}{CD} = \frac{1}{4}$,求 $\tan \angle ACB$ 的值.

解:(1)由 $a\cos C - \frac{1}{2}c = b$ 结合正弦定理可得 $\sin A \cos C - \frac{1}{2}\sin C = \sin B$,

2分

因为 $A+B+C=\pi$,所以 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

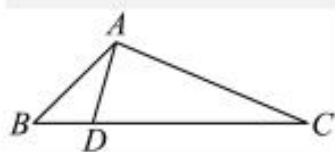
所以 $\sin A \cos C - \frac{1}{2}\sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,4分

即 $-\frac{1}{2}\sin C = \cos A \sin C$,

因为 $\sin C \neq 0$,所以 $\cos A = -\frac{1}{2}$,

因为 $A \in (0, \pi)$,所以 $A = \frac{2\pi}{3}$;6分

(2)如图,



在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD = CD \cdot \sin C = 4BD \cdot \sin C$,8分

在 $\triangle ABD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3} - C$,

$\frac{BD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AD}{\sin B}$,10分

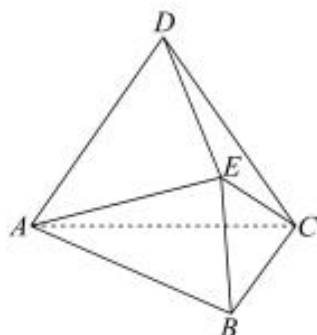
故 $\frac{BD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{4BD \cdot \sin C}{\sin(\frac{\pi}{3} - C)}$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C - \frac{1}{2}\sin C = 2\sin C$,

所以 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{5}$,

故 $\tan \angle ACB$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$12分

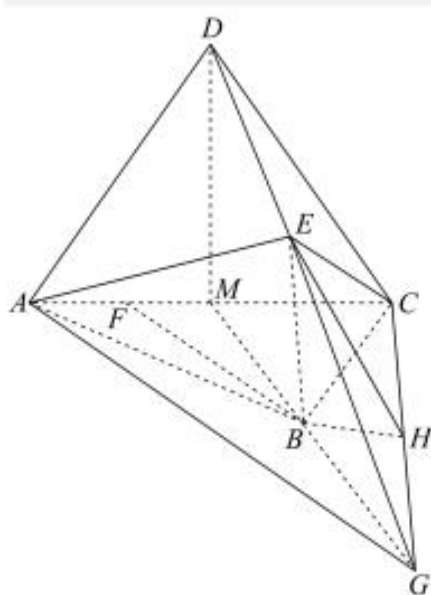
20. 如图, 在多面体 $ABCDE$ 中, 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , $BE \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 均为正三角形, $AC=4$, $BE=\sqrt{3}$.



(1) 若 $\overline{AF} = \frac{1}{4}\overline{AC}$, 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(2) 求平面 CDE 与平面 ABC 所成的锐二面角的正切值.

解: (1) 记 AC 中点为 M , 连结 DM , $\triangle ACD$ 为正三角形, $AC=4$.



则 $DM \perp AC$, 且 $DM=2\sqrt{3}$.

因为平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACD \cap$ 平面 $ABC = AC$, $DM \subset$ 平面 ACD ,

所以 $DM \perp$ 平面 ABC , 又因为 $BE \perp$ 平面 ABC ,

所以 $DM \parallel BE$.

延长 MB, DE 交于点 G , 则 AG 为平面 ADE 与平面 ABC 的交线,2 分

因为 $BE = \sqrt{3}$, 故 $DM = 2BE$, 所以 B 为 MG 的中点,

连结 BF , 则 $BF \parallel AG$,4 分

因为 $AG \subset \text{平面} ADE$, $BF \not\subset \text{平面} ADE$,

所以 $BF \parallel \text{平面} ADE$6 分

法 2: 取 DM 中点 N , 由面 BNF 与平面 ADE 平行, 可得 NF 与 AD 平行, 可得。

(2) 连结 CG , 则 CG 为平面 CDE 与平面 ABC 的交线,

在平面 ABC 内, 过点 B 作 CG 的垂线, 垂足为 H .

连结 EH , 因为 $BE \perp \text{平面} ABC$, $CG \subset \text{平面} ABC$, 故 $BE \perp CG$,

$BE \cap BH = B$, $BE, BH \subset \text{平面} BEH$, 故 $CG \perp \text{平面} BEH$,8 分

$EH \subset \text{平面} BEH$, 故 $CG \perp EH$,

则 $\angle BHE$ 为平面 CDE 与平面 ABC 所成的二面角的平面角.10 分

$\triangle ABC$ 为正三角形, $AC = 4$, 故 $BM = 2\sqrt{3}$, 则 $BG = BM = 2\sqrt{3}$.

且 $\angle MBC = 30^\circ$, $\therefore \angle GBC = 150^\circ$,

故在 $\triangle GBC$ 中, $GC^2 = BG^2 + BC^2 - 2BG \cdot BC \cos \angle GBC = 12 + 16 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 52$,

故 $CG = 2\sqrt{13}$, 而 $S_{\triangle BGC} = \frac{1}{2} BC \times BG \times \sin 150^\circ = 2\sqrt{3}$,

故 $BH = \frac{2S_{\triangle BGC}}{CG} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, 又因为 $BE = \frac{1}{2} DM = \sqrt{3}$,

所以 $\tan \angle BHE = \frac{BE}{BH} = \frac{\sqrt{13}}{2}$,

即平面 CDE 与平面 ABC 所成的锐二面角的正切值为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$12 分

也可以从 D 点作

21. 甲、乙、丙三个学校进行篮球比赛, 各出一个代表队, 简称甲队、乙队、丙队. 约定赛制如下: 累计负两场者被淘汰; 比赛前抽签决定首先比赛的两个队, 另一队轮空; 每场比赛的胜队与轮空队进行下一场比赛, 负队下一场轮空, 直至有一队被淘汰; 当一队被淘汰后, 剩余的两队继续比赛, 直至其中一队被淘汰, 另一队最终获胜, 比赛结束. 已知在每场比赛中, 甲队胜乙队和甲队胜丙队的概率均为 $\frac{2}{3}$, 乙队胜丙队的概率为 $\frac{1}{2}$, 各场比赛的结果相互独立. 经抽签, 第一场比赛甲队轮空.

(1) 求“前三场比赛结束后, 乙队被淘汰”的概率;

(2) 求“一共只需四场比赛甲队就获得冠军”的概率;

(3) 求“需要进行第五场比赛”的概率.

解：(1) 记事件 A 为甲队胜丙队，则 $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ ，

事件 B 为甲队胜乙队，则 $P(B) = \frac{2}{3}$ ， $P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$ ，

事件 C 为丙队胜乙队，则 $P(C) = \frac{1}{2}$ ， $P(\bar{C}) = \frac{1}{2}$ ，

前三场比赛结束后，乙队被淘汰的概率为

$$P_1 = P(C\bar{A}\bar{C}) + P(CAB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{36} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 只需四场比赛甲队就获得冠军的概率为：

由于甲队胜乙队和甲队胜丙队的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，且乙队胜丙队和丙队胜乙队的概率也相等，均为 $\frac{1}{2}$ ，第一场比赛甲队轮空，以后的比赛相对于甲队，可视乙队丙队为同一人，

设甲队胜为事件 D ，甲队轮空为事件 E ，

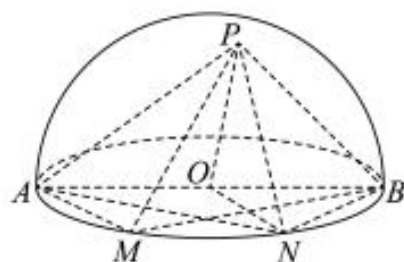
$$\text{所以甲队最终获胜的概率 } P_2 = P(EDDD) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(3) 只需四场比赛就决出冠军的概率为：

$$\begin{aligned} P_3 &= P(C\bar{A}\bar{C}\bar{A}) + P(\bar{C}\bar{B}\bar{C}\bar{B}) + P(CABA) + P(\bar{C}BAB) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{19}{54} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{故需要进行第五场比赛的概率为：} P_4 = 1 - P_3 = \frac{35}{54} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 如图， AB 是半球的直径， O 为球心， $AB = 4$ ， M ， N 依次是半圆上的两个三等分点， P 是半球面上一点，且 $PN \perp MB$ 。

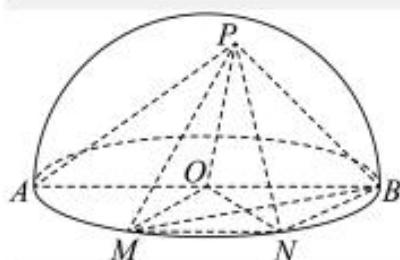


(1) 证明：平面 $PBM \perp$ 平面 PON ；

(2) 若点 P 在底面圆内的射影恰在 BM 上，

① 求 PN 与平面 PMB 所成角；② 求点 M 到平面 PAB 的距离。

解：(1) 证明：连接 OM ， MN ，如图， M ， N 是半圆 $\widehat{AB}$ 上的两个三等分点，



则有 $\angle MON = \angle NOB = 60^\circ$,

$\therefore OM = OB = ON = 2$,

$\therefore \triangle MON, \triangle NOB$ 都是正三角形.

$\therefore MN = NB = OB = OM$,

四边形 $OMNB$ 是菱形, $ON \perp MB$,2 分

$\therefore PN \perp MB$, $PN \cap ON = N$, PN, ON 平面 PON ,

$\therefore MB \perp$ 平面 PON , $BM \subset$ 平面 PBM .

$\therefore$ 平面 $PBM \perp$ 平面 PON4 分

(2) 由(1)知, $MB \perp$ 平面 PON ,

所以平面 $PON \perp$ 平面 $OMNB$, 平面 $PON \cap$ 平面 $OMNB = ON$,

则点 P 在底面圆内的射影在 ON 上,

又 $\because$ 点 P 在底面圆内的射影在 BM 上,

$\therefore$ 点 P 在底面圆内的射影是 ON 与 MB 的交点 Q ,6 分

$$\textcircled{1} \therefore PQ = \sqrt{PO^2 - OQ^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3},$$

则 $PQ \perp$ 平面 $AMNB$, $\therefore PQ \perp QN$, 又 $\because BM \perp QN$, $\therefore NQ \perp$ 平面 PBM , $\therefore \angle QPN$

就是 PN 与平面 PMB 所成角, 在 $Rt\triangle QPN$ 中, $\sin \angle QPN = \frac{QN}{PN} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle QPN = \frac{\pi}{6}$,

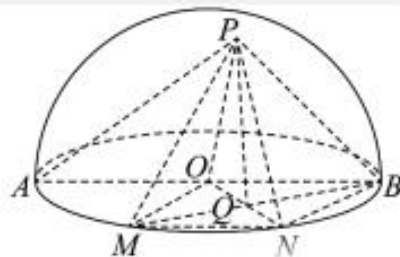
故 PN 与平面 PMB 所成角 $\frac{\pi}{6}$;8 分

$$\textcircled{2} \text{ 故 } PB = \sqrt{PQ^2 + BQ^2} = \sqrt{3 + 3} = \sqrt{6},$$

在 $\triangle AOQ$ 中, 由余弦定理, 可得

$$AQ^2 = AO^2 + OQ^2 - 2AO \times OQ \times \cos 120^\circ = 2^2 + 1^2 + 2 = 7,$$

$$\text{故 } AQ = \sqrt{7}, \text{ 故 } PA = \sqrt{10},$$



$$\text{在} \triangle PAB \text{ 中, } \cos \angle PAB = \frac{PA^2 + AB^2 - PB^2}{2 \times PA \times AB} = \frac{10 + 16 - 6}{2 \times \sqrt{10} \times 4} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\text{故 } \sin \angle PAB = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{故 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times PA \times AB \times \sin \angle PAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times 4 \times \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{15}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由 } V_{P-ABM} = V_{M-PAB}, \text{ 可得 } \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAB} \cdot d_{M-PAB} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle AMB} \cdot PQ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \sqrt{15} \times d_{M-PAB} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}, \text{ 所以 } \sqrt{15} d_{M-PAB} = 6,$$

$$\text{点 } M \text{ 到平面 } PAB \text{ 的距离为 } d_{M-PAB} = \frac{2\sqrt{15}}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法2: 过点 Q 作 $QH \perp OP$ 于 H , 连结 BH , 过点 M 作 $MT \perp BH$ 于 T 。

$\because BM \perp \text{面 } PON, \therefore BM \perp PO,$

又 $\because QH \perp PO, \therefore PO \perp \text{面 } OBM, \therefore PO \perp MT,$

又 $\because MT \perp BH, \therefore MT \perp \text{面 } PAB, \therefore MT$ 为点 M 到平面 PAB 的距离。 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{在 } \triangle POQ \text{ 中, } OQ = 1, OP = 2, \therefore \angle POQ = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{又 } \because BM = 2\sqrt{3}, \therefore \tan \angle HBQ = \frac{QH}{QB} = \frac{1}{2}, \therefore \sin \angle HBQ = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{又 } \because \sin \angle TBM = \frac{TM}{MB}, \therefore \frac{TM}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \therefore MT = \frac{2\sqrt{15}}{5},$$

$$\text{故点 } M \text{ 到平面 } PAB \text{ 的距离为 } d_{M-PAB} = \frac{2\sqrt{15}}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线