2020～2021年度河南省高三质量检测(五)
数学(理科)

考生注意：
1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分。考试时间120分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x\leqslant 0\}$，$B=\{x|2^x<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<2\}$ B. $\{x|0\leqslant x<2\}$
C. $\{x|x<2\}$ D. $\{x|0\leqslant x<1\}$

2. 已知复数 $z=a(1+i)+\frac{-2+i}{1+2i}$，若 z 在复平面内所对应的点位于第二象限，则实数 a 的取值范围是

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$ C. $(-\infty,-1)$ D. $(1,+\infty)$

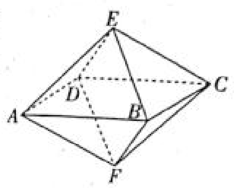
3. 若向区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 内随机投点，则该点落在区域 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant \frac{1}{4}\}$ 内的概率为

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{16}$ D. $\frac{\pi}{32}$

4. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\ x-y-1\geqslant 0,\\ y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=4x+y$ 的最大值为

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

5. 正多面体被古希腊圣哲认为是构成宇宙的基本元素，加上它们的多种变体，一直是科学、艺术、哲学灵感的源泉之一. 如图，该几何体是一个棱长为2的正八面体，则此正八面体的体积与表面积之比为



A. $\frac{\sqrt{6}}{18}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{12}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos 2\alpha=2\cos\alpha-\cos^2\alpha$，则 $\sin\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

7. $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^8$ 展开式中 x^3 的系数为

A. 28 B. 32 C. 56 D. 72

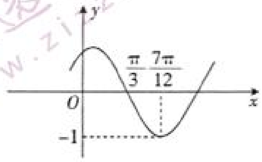
8. 若函数 $f(x)=m\cdot e^x-x^2+2x(m<0)$ 在 $(0,1)$ 上有极值点，则 m 的取值范围为

A. $(-2,0)$ B. $(-2,-\frac{1}{e})$ C. $(-\frac{1}{e},0)$ D. $(-1,-\frac{1}{e})$

9. 已知 A,B 分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点，$P,Q$ 是椭圆上的不同两点且关于 x 轴对称，设直线 AP,BQ 的斜率分别为 m,n，若 $mn=\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则



A. $\omega=3$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $f(0)+f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$

D. $f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$

11. 已知二次函数 $f(x)$满足 $f(x+1)=f(x)-2x+1$，且 $f(1)=-1$. 对任意 $x_1>x_2>-1$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>m(x_1+x_2)$成立，则 m 的取值范围为

A. $[-2,-1]$　　B. $[-2,-1)$　　C. $[-4,-1]$　　D. $[-4,-1)$

12. 已知双曲线 ω：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 是双曲线 ω 上的一点，若$\angle F_1PF_2=120°$，且$\triangle F_1PF_2$ 外接圆与内切圆的半径之比为 8∶1，则双曲线 ω 的离心率为

A. $\frac{4\sqrt{46}}{23}$　　B. $\frac{4\sqrt{69}}{23}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

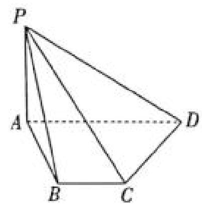
第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(m,m+2)$，$\boldsymbol{b}=(1,m)$，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，则 $m=$__▲__.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数，若 $f(m)+f(3-2m)>f(0)$，则 m 的取值范围为__▲__.

15. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，若 $PA=AD=2$，$AD/\!/BC$，$\angle DAB=\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$PC$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为__▲__.



16. 已知等边三角形 ABC 的边长为 2，边 AB 上有两点 M,N，满足$\angle MCN=30°$，则 $S_{\triangle MCN}$的最小值是__▲__.

三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22，23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17．（12分）

已知数列$\{a_n\}$的首项为$\frac{1}{2}$，且满足$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

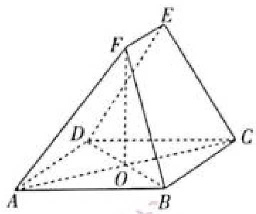
（2）已知$b_n=a_n+\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n．

18．（12分）

如图，已知四边形$ABCD$为菱形，对角线AC与BD相交于O，$\angle BAD=60^\circ$，点E不在平面$ABCD$内，平面$ADEF\cap$平面$BCEF=EF$，$OF\perp$平面$ABCD$，$BC=CE=DE=2EF=2$．

（1）证明：$EF/\!/AD$．

（2）求平面$ADEF$与平面$BCEF$所成锐二面角的余弦值．



19．（12分）

已知动点M到点$F(3,0)$的距离比它到直线$l:x+5=0$的距离小2．

（1）求动点M的轨迹E的方程．

（2）过点F作斜率为$k(k\neq 0)$的直线l'与轨迹E交于点A,B，线段AB的垂直平分线交x轴于点N，证明：$\frac{|AB|}{|FN|}$为定值．

20．（12分）

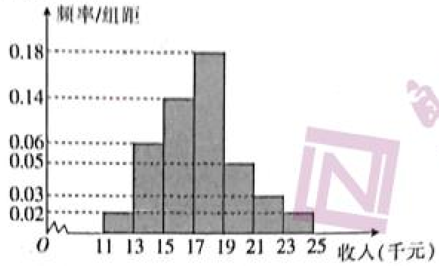
已知函数$f(x)=x-\frac{m+2}{x}-2\ln x$．

（1）若$f(x)$在定义域内单调递增，求m的取值范围；

（2）若存在$x_0\in[1,e]$，使得$f(x_0)>0$成立，求m的取值范围．

21.(12分)

某贫困地区扶贫办积极贯彻落实国家精准扶贫的政策要求，带领广大农村地区人民群众脱贫奔小康.经过不懈的奋力拼搏，新农村建设取得巨大进步，农民年收入也逐年增加，为了制定提升农民收入、实现2020年脱贫的工作计划，该地扶贫办统计了2019年50位农民的年收入并制成如下频率分布直方图：



(1)根据频率分布直方图，估计这50位农民的平均年收入 $\overline{x}$(单位：千元)(同一组数据用该组数据区间的中点值表示).

(2)为推进精准扶贫，某企业开设电商平台进行扶贫，让越来越多的农村偏远地区的农户通过经营网络商城脱贫致富.甲计划在A店，乙计划在B店同时参加一个订单"秒杀"抢购活动，其中每个订单由 $n(n\geqslant 2,n\in \mathbf{N}^*)$ 个商品W构成，假定甲、乙两人在A，B两店订单"秒杀"成功的概率分别为 p,q，记甲、乙两人抢购成功的订单总数量、商品W总数量分别为 X,Y.

①求X的分布列及数学期望 $E(X)$；

②若 $p=\dfrac{7\sin\frac{\pi}{n}}{4n}-\dfrac{\pi}{n^2},q=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{4n}$，求当Y的数学期望 $E(Y)$ 取最大值时正整数n的值.

(二)选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=3-2t\end{cases}$ (t 为参数)，曲线C的方程为 $x^2-4x+y^2+2=0$，以O为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求直线 l 和曲线C的极坐标方程；

(2)若射线 $\theta=\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 与曲线C相切于点M(点M位于第一象限)，且与直线 l 相交于点N，求 $|MN|$.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ac=abc$.

(1)证明：$a+b+c\geqslant 9$.

(2)证明：$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\geqslant 1$.

2020～2021年度河南省高三质量检测(五)
数学参考答案(理科)

1. B　∵$A=\{x|x^2-4x\leqslant 0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|2^x<4\}=\{x|x<2\}$，∴$A\cap B=\{x|0\leqslant x<2\}$.

2. A　$z=a(1+i)+\frac{-2+i}{1+2i}=a(1+i)+\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=a(1+i)+\frac{5i}{5}=a+(a+1)i$，则$\begin{cases}a<0,\\a+1>0,\end{cases}$

得$-1<a<0$.

3. C　区域D的面积为$1\times1=1$，在区域D中，满足$x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$的面积为$\frac{1}{4}\pi\times(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{16}$.

则所求概率$P=\frac{\pi}{16}$.

4. C　作出不等式组表示的可行域(图略)，当直线$y=-4x+z$过点$(2,-2)$时，z取得最大值6.

5. B　正八面体的上、下结构是两个相同的正四棱锥，由勾股定理求得斜高，再由棱锥的体积公式即可求解.

由边长为2，可得正八面体上半部分的斜高为$\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，高为$\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，则其体积为$\frac{2\times2\times\sqrt{2}}{3}\times2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，其表面积为$8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=8\sqrt{3}$，所以此正八面体的体积与表面积之比为$\frac{\sqrt{6}}{9}$.

6. D　由$\cos 2\alpha=2\cos\alpha-\cos^2\alpha$，得$3\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$，解得$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$或$\cos\alpha=1$.

又因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. A　$(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^8$展开式的通项公式为$C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\cdot(\sqrt[3]{x})^r=C_8^r x^{4-\frac{r}{6}}$，

令$4-\frac{r}{6}=3$，得$r=6$，所以展开式中x^3的系数为$C_8^6=28$.

8. A　$f'(x)=m\cdot e^x-2x+2(m<0)$，所以$f'(x)$在$(0,1)$上为减函数，

所以$\begin{cases}f'(0)=m+2>0,\\f'(1)=me<0,\end{cases}$解得$-2<m<0$.

9. C　设$P(x_0,y_0)$，则$Q(x_0,-y_0)$，$m=\frac{y_0}{x_0-a}$，$n=\frac{-y_0}{x_0+a}$，$mn=-\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}$，又因为$y_0^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，所以$mn=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. D　由函数图象可知$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，即$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$，

将$(\frac{7\pi}{12},-1)$代入得$\sin(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi)=-1\Rightarrow\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

∴$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\varphi=\frac{\pi}{3}$，∴$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

∴$f(\frac{n\pi}{6})=\sin(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{3})$是以6为最小正周期的周期函数，

则$f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{2\pi}{6})=\sin\pi=0$，$f(\frac{3\pi}{6})=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{4\pi}{6})=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{5\pi}{6})=\sin 2\pi=0$，$f(\frac{6\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$.

11. A　设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

则 $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$，

又∵ $f(x+1)=f(x)-2x+1$，

∴ $ax^2+(2a+b)x+a+b+c=ax^2+(b-2)x+c+1$，

∴ $\begin{cases}2a+b=b-2,\\a+b+c=c+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

∵ $f(1)=-1$，∴ $a+b+c=-1$，∴ $c=-2$，

∴ $f(x)=-x^2+2x-2$.

∵ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>m(x_1+x_2)$，∴ $f(x_1)-mx_1^2>f(x_2)-mx_2^2$，

∵ $x_1>x_2>-1$，∴函数 $f(x)-mx^2$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

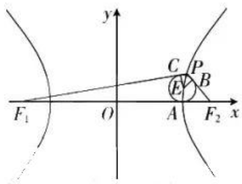
令 $g(x)=f(x)-mx^2=(-1-m)x^2+2x-2$.

当 $m=-1$ 时，$g(x)=2x-2$ 满足题意；

当 $m\neq-1$ 时，$\begin{cases}-m-1>0,\\ \dfrac{2}{2(1+m)}\leqslant-1,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant m<-1$.

综上，m 的取值范围为 $[-2,-1]$.

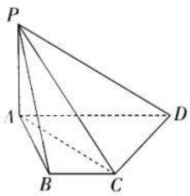
12. B　设 $\triangle F_1PF_2$ 的外接圆与内切圆的半径分别为 R,r，则 $R=8r$. 因为 $\angle F_1PF_2=120°$，$|F_1F_2|=2c$，所以 $\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\angle F_1PF_2}=\dfrac{2c}{\sin 120°}=2R$，则 $R=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{12}c$. 如图，圆 E 是 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆，且与 $\triangle F_1PF_2$ 的三边分别切于 A,B,C 三点. 设点 $A(x_0,0)$，则 $|PF_1|-|PF_2|=(|PC|+|CF_1|)-(|PB|+|BF_2|)=|CF_1|-|BF_2|=|F_1A|-|AF_2|$，所以 $2a=c+x_0-(c-x_0)$，解得 $x_0=a$，即 $|AF_1|=|CF_1|=c+a$，$|AF_2|=|BF_2|=c-a$. 因为直线 PE 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，且 $EB\perp PF_2$，所以 $\dfrac{EB}{PB}=\tan 60°$，可得 $|PB|=|PC|=\dfrac{1}{12}c$. 因为 $\dfrac{1}{2}(|PF_1|+|F_1F_2|+|PF_2|)\cdot r=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2$，所以 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{6}c\times\dfrac{\sqrt{3}}{12}c=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{169}{144}c^2-a^2)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，整理得 $48a^2=23c^2$，故 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4\sqrt{69}}{23}$.



13. -1　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，可得向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向，所以 $m^2=m+2$，解得 $m=2$（舍去）或 $m=-1$.

14. $(3,+\infty)$　由题可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(0)=0$，故 $f(m)+f(3-2m)>f(0)$ 可化为 $f(m)>f(2m-3)$，则 $m<2m-3$，解得 $m>3$，即 m 的取值范围为 $(3,+\infty)$.

15. 8π　连接 AC，则 $\angle PCA$ 为 PA 与平面 ABC 所成角，即 $\tan\angle PCA=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $AC=\sqrt{3}$. 因为 $AD/\!/BC$，$\angle DAB=\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，且可求得 $CD=1$，$AC\perp CD$，所以底面 $ABCD$ 外接圆的半径为 1，且四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心为 AD 的中点，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的半径 $R=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故该四棱锥外接球的表面积 $S=4\pi R^2=8\pi$.



16. $6-3\sqrt{3}$　设 $CM=x$，$CN=y$，$S_{\triangle MCN}$ 记为 S，

则在 $\triangle MCN$ 中，有 $S=\dfrac{1}{2}xy\sin 30°=\dfrac{1}{4}xy$，即 $xy=4S$.

在 $\triangle ACB$ 中，点 C 到 AB 的距离 $d=\sqrt{3}$，

故 $S=\dfrac{1}{2}d\cdot MN=\dfrac{\sqrt{3}}{2}MN$，即 $MN=\dfrac{2S}{\sqrt{3}}$.

由余弦定理可得 $MN^2=x^2+y^2-2xy\cos 30°=x^2+y^2-\sqrt{3}xy\geqslant 2xy-\sqrt{3}xy$，

当且仅当 $x=y$ 时，取等号，即$(\frac{2}{\sqrt{3}}S)^2\geqslant(2-\sqrt{3})\cdot 4S$，可得 $S\geqslant 6-3\sqrt{3}$.

17. 解：(1)由$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$，得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$. ………… 1分

又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$. ………… 4分

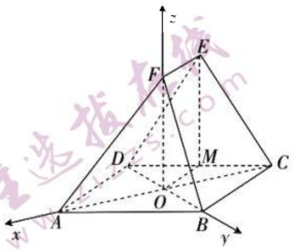
又 $n=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. ………… 5分

(2)$b_n=a_n+\frac{1}{na_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n+1$， ………… 7分

所以 $S_n=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+\frac{(2+n+1)n}{2}$ ………… 10分

$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{n^2+3n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}+\frac{n}{n+1}$. ………… 12分

18. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AD/\!/BC$，
因为 $AD\not\subset$平面 $BCEF$，$BC\subset$平面 $BCEF$，
所以 $AD/\!/$平面 $BCEF$. ………… 3分
因为平面 $ADEF\cap$平面 $BCEF=EF$，$AD\subset$平面 $ADEF$，
所以 $EF/\!/AD$. ………… 5分
(2)解：因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.
因为 $OF\perp$平面 $ABCD$，所以以 O 为坐标原点，OA，OB，OF 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.
取 CD 的中点 M，连接 EM，OM，
则$\angle BAD=60°$，$BC=2$，所以 $OA=OC=\sqrt{3}$，$OB=OD=1$.
因为 $BC=CD=CE=DE=2$，所以$\triangle CDE$ 为正三角形，$EM=\sqrt{3}$.
因为 $OM/\!/BC$，$OM=\frac{1}{2}BC$，$EF/\!/BC$，$EF\underset{=}{/\!/}\frac{1}{2}BC$，所以 $EF/\!/OM$，$EF=OM$，所以 $OF/\!/EM$，$OF=EM$.



从而 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$，$E(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{ED}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-\sqrt{3})$. ………… 6分

设平面 $ADEF$ 一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot(-\sqrt{3},-1,0)=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3})=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，所以 $y=-\sqrt{3}$，$z=-1$，$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},1)$. ………… 8分
设平面 $BCEF$ 一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot(-\sqrt{3},-1,0)=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3})=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}-\sqrt{3}a-b=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b-\sqrt{3}c=0,\end{cases}$

令 $a=1$，所以 $b=-\sqrt{3}$，$c=-1$，$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$. ………… 10分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{3}{5}$.

因此平面 $ADEF$ 与平面 $BCEF$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$. ………………………………… 12 分

19. (1)解：由题意知，动点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离与到直线 $l_1: x+3=0$ 距离相等，………………………… 1 分

由抛物线的定义知，轨迹 E 是以 $F(3,0)$ 为焦点，以直线 $l_1: x+3=0$ 为准线的抛物线. ……………… 3 分

所以点 M 的轨迹 E 的方程为 $y^2=12x$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明：设直线 $l': x=ty+3$，

联立 $\begin{cases} x=ty+3, \\ y^2=12x, \end{cases}$ 得 $y^2-12ty-36=0$. ……………………………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，G 为线段 AB 的中点，

则 $y_1+y_2=12t$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+6=12t^2+6$，所以 $G(6t^2+3,6t)$，……………………… 7 分

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-6t=-t(x-6t^2-3)$，则 $N(6t^2+9,0)$. ………………… 8 分

从而 $|FN|=6t^2+9-3=6t^2+6$. …………………………………………………………… 10 分

$|AB|=x_1+x_2+6=12t^2+12$，所以 $\frac{|AB|}{|FN|}=2$ 为定值. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)∵ $f'(x)=1+\frac{m+2}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+m+2}{x^2}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，……………………… 2 分

∴ $m\geqslant -x^2+2x-2$，则 $m\geqslant -1$，∴ m 的取值范围为 $[-1,+\infty)$. ……………………………… 5 分

(2)令 $f(x)=x-\frac{m+2}{x}-2\ln x(x\in[1,e])$，$f'(x)=1+\frac{m+2}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+m+2}{x^2}$.

∵ $1\leqslant x\leqslant e$，∴ $m+1\leqslant x^2-2x+m+2\leqslant e^2-2e+m+2$.

当 $m+1\geqslant 0$，即 $m\geqslant -1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，∴ $f(x)_{\max}=f(e)=e-\frac{m+2}{e}-2>0$，

∴ $-1\leqslant m<e^2-2e-2$. ……………………………………………………………… 7 分

当 $e^2-2e+m+2\leqslant 0$，即 $m\leqslant -e^2+2e-2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，

∴ $f(x)_{\max}=f(1)=-1-m>0$，∴ $m\leqslant -e^2+2e-2$. ……………………………………………… 9 分

当 $-e^2+2e-2<m<-1$ 时，存在 $x_1\in(1,e)$，使得 $f(x)$ 在 $(1,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,e) 上单调递增，

∴ $f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(e)\}$，

∴ $f(1)=-1-m>0$，或 $f(e)=e-\frac{m+2}{e}-2>0$，解得 $-e^2+2e-2<m<-1$. ……………………… 11 分

综上所述，m 的取值范围是 $(-\infty,e^2-2e-2)$. ………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) $\bar{x}=12\times0.04+14\times0.12+16\times0.28+18\times0.36+20\times0.10+22\times0.06+24\times0.04=17.4$ 千元.

故估计这 50 位农民的年平均收入 $\bar{x}$ 为 17.4 千元. ……………………………………………… 3 分

(2)①由题知，X 的可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=(1-p)(1-q)$；

$P(X=1)=(1-p)q+(1-q)p$；

$P(X=2)=pq$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$1-p-q+pq$	$p+q-2pq$	pq

……………………………………………………………………………………………… 6 分

$E(X)=0\times(1-p)(1-q)+(p+q-2pq)+2pq=p+q$. ……………………………………………… 7 分

②因为 $Y=nX$，……………………………………………………………………………… 8 分

所以 $E(Y)=nE(X)=n(p+q)=n(\frac{7\sin\frac{\pi}{n}}{4n}-\frac{\pi}{n^2}+\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{4n})=2\sin\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}$. ………………………… 10 分

令 $t=\frac{1}{n}\in(0,\frac{1}{2}]$，设 $f(t)=2\sin\pi t-\pi t$，则 $E(Y)=f(t)$，

$f'(t)=2\pi\cos\pi t-\pi=2\pi(\cos\pi t-\frac{1}{2})$，且 $\pi t\in(0,\frac{\pi}{2}]$.

当 $t\in(0,\frac{1}{3})$ 时，$f'(t)>0$，所以 $f(t)$ 在区间 $(0,\frac{1}{3})$ 上单调递增；

当 $t\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ 时，$f'(t)<0$，所以 $f(t)$ 在区间 $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ 上单调递减.

所以，当 $t=\frac{1}{3}$，即 $n=3$ 时，$f(t)\leqslant f(\frac{1}{3})=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$，

故当 $E(Y)$ 取最大值时，n 的值为 3. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)消去 t 可得 $l:x+y-4=0$， ………………………………………………………… 1 分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入普通方程，

可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$，……………………………………… 2 分

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$. ………………………………………… 4 分

(2)在极坐标系中，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho^2-4\rho\cos\theta+2=0,\end{cases}$ 可得 $\rho^2-4\rho\cos\alpha+2=0$.

因为射线 $\theta=\alpha$ 与曲线 C 相切，所以 $(4\cos\alpha)^2-4\times2=0$，即 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，又点 M 位于第一象限，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，

……………………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $|OM|=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 7 分

联立 $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{4},\\ \rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0,\end{cases}$ 解得 $\rho=2\sqrt{2}$，即 $|ON|=2\sqrt{2}$，……………………………… 8 分

所以 $|MN|=|ON|-|OM|=\sqrt{2}$. …………………………………………………………… 10 分

23. 证明：(1)因为 $ab+bc+ac=abc$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$，………………………………… 2 分

所以 $a+b+c=(a+b+c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+$

$2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

所以 $a+b+c\geqslant9$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2) $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}=\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1=(\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b})+(\frac{c}{b^2}+\frac{1}{c})+(\frac{a}{c^2}+\frac{1}{a})-1\geqslant\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$

$-1=1$， ……………………………………………………………………………………………… 8 分

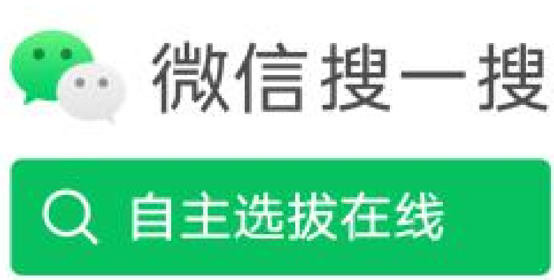
当且仅当 $a=b=c$ 时取等号，

即 $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\geqslant1$. ………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》