

北京四中2020届高三数学期中测试卷

试卷满分：150分 考试试卷：120分钟

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ，集合 B 为正整数集，则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0, 1, 2\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0\}$

2. 命题 $p: \exists n \in N, n^2 > 2^n$ 的否定是

- A. $\forall n \in N, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in N, n^2 \leq 2^n$ C. $\forall n \in N, n^2 \leq 2^n$

D. $\exists n \in N, n^2 = 2^n$

3. 若复数 $z = (1 + bi)(2 + i)$ 是纯虚数 (i 是虚数单位)，则实数 $b =$

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -2

4. 若角 α 顶点在坐标原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边经过点 $P(-\sqrt{2}, 1)$ ，则 $\cos 2\alpha =$

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 设 a, b, c, d 是非零实数，则 “ $ad = bc$ ” 是 “ a, b, c, d 成等比数列” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要

6. 已知曲线 $y = ae^x + x \ln x$ 在点 $(1, ae)$ 处的切线方程为 $y = 2x + b$ ，则

- A. $a = e, b = -1$ B. $a = e, b = 1$ C. $a = e^{-1}, b = -1$ D. $a = e^{-1}, b = 1$

7. 已知 a, b 为不相等的两个正数，且 $\lg ab = 0$ ，则函数 $y = a^x$ 和 $y = b^x$ 的图象

- A. 关于原点对称 B. 关于 y 轴对称 C. 关于 x 轴对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

8. 已知函数 $f(x) = a \sin x - b \cos x$ (a, b 为常数，且 $a \neq 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称，

则函数 $y = f(\frac{3\pi}{4} - x)$ 是

- A. 偶函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
B. 偶函数且它的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称
C. 奇函数且它的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 对称
D. 奇函数且它的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称

9. 某商场对顾客实行购物优惠活动，规定一次购物：

- (1) 如不超过200元，则不予优惠；
(2) 如超过200元但不超过500元，则全款按9折优惠；
(3) 如超过500元，其中500元按9折给予优惠，超过500的部分按8折给予优惠。

某人两次去购物，分别付款168元和423元，若他只去一次购买同样价格的商品，则应付款

- A. 472.8元 B. 510.4元 C. 522.8元 D. 560.4元

10. 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} + x$ ，设 x_1, x_2, x_3 是曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = a$ 的三个交点的横坐标，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则下列命题错误的是

- A. 存在实数 a ，使得 $x_3 - x_2 > 4$ B. 任给实数 a ，都有 $x_3 - x_1 > 4$
C. 存在实数 a ，使得 $x_2 - x_1 > 1$ D. 任给实数 a ，都有 $x_3 - x_2 > 1$

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

11. 若函数 $f(x) = x^2 - (a-2)x + 1$ 为偶函数，则 $\log_a \frac{2}{7} - \log_{\frac{1}{a}} \frac{7}{8} =$ _____.

12. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列，则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

13. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 的极大值点为_____.

14. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ， $AB=4$ ， $BC=3$ ，点 D 在线段 AC 上，若 $\angle BDC = 45^\circ$ ，则 $BD =$ _____， $\cos \angle ABD =$ _____.

15. 函数 $f(x) = x^2 - a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ ，若当 $x \in (-1, 1)$ 时，均有 $f(x) < \frac{1}{2}$ ，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2, a_n = 1 - \frac{1}{a_{n-1}}$.

① $a_4 =$

② 若 $\{a_n\}$ 有一个形如 $a_n = A \sin(\omega n + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的通项公式, 则此通项公式可以为 $a_n =$ _____ (写出一个即可).

三、解答题: 本大题共6小题, 满分80分.

17. (本题13分)

已知: 函数 $f(x) = a \sin x \cos x - \sqrt{3} a \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} a + b (a > 0)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 设 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x)$ 的最小值是 -2 , 最大值是 $\sqrt{3}$, 求实数 a, b 的值.

18. (本题13分)

已知：等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, a_4 = 16$.

(1) 求函数 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 a_3, a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第3项和第5项，试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式以及前n项和 S_n .

19. (本小题满分13分)

近年来，某企业每年消耗电费约24万元，为了节能减排，决定安装一个可使用15年的太阳能供电设备接入本企业电网. 安装这种供电设备的工本费（万元）与太阳能电池板的面积（平方米）成正比，比例系数约为0.5，为了保证正常用电，安装后采用太阳能和电能互补供电模式，假设在此模式下，安装后该企业每年消耗的电费 C （万元）与安装的这种太阳能电池板的面积 x （平方米）之间的函数关系是 $C(x) = \frac{k}{20x+100} (x \geq 0, k \text{ 为常数})$ ，记 F 为该

企业安装这种太阳能供电设备的费用与该企业15年消耗的总电费之和.

- (1) 试解析 $C(0)$ 的实际意义, 并建立 F 关于 x 的函数关系式;
- (2) 当 x 为多少平方米时, F 取得最小值? 最小值是多少万元?

20. (本小题满分13分)

已知: $\triangle ABC$ 中, 满足 $\frac{2c-b}{a} = \frac{\cos B}{\cos A}$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 $a = 2\sqrt{5}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21. (本题14分)

已知：函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{1-a}{x} - 1 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 $g(x) = x^2 - 2bx + 4$ ，当 $a = \frac{1}{4}$ 时，若对任意 $x_1 \in (0, 2)$ ，存在 $x_2 \in [1, 2]$ ，使 $f(x_1) \geq g(x_2)$ ，求实数 b 的取值范围.

22. (本小题14分)

将全体自然数填入如图所示的3行无穷列的表格，每格只填一个数字，不同格内的数字不同.

第1行				...
第2行				...
第3行				...

对于正整数 a, b ，如果存在满足上述条件的一种填法，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，都有 $n, n+a, n+b$ 分别在表格的不同行，则称数对 (a, b) 为自然数集 $\mathbb{N}$ 的“友好数对”.

(1) 是判断数对 $(1, 2)$ 与 $(1, 3)$ 是否是 $\mathbb{N}$ 的“友好数对”，并说明理由；

(2) 若 $a=3$ ，问：是否存在 b ，使得数对 (a, b) 是 $\mathbb{N}$ 的“友好数对”？若存在，给出满足条件的一个 b 的取值，并写出相应的表格填法，若不存在，请说明理由；

(3) 试给出使得数对 (a, b) 是 $\mathbb{N}$ 的“友好数对”的一个充分条件. (结论不要求证明)

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>