高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、不等式、立体几何。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\{x\in \mathbf{Z}|x^2\leqslant 4\}$，集合$A=\{y|y=\sin\frac{n\pi}{2},n\in \mathbf{Z}\}$，则$\complement_U A=$

A. $[-2,-1)\cup(1,2]$　　B. $(1,2]$

C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

2. 已知复数z满足$(z-1)(1+i)=2i$，则在复平面上z所对应的点位于

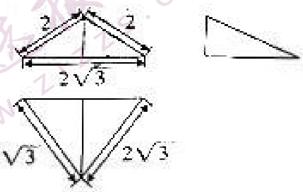
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



4. 对于实数a,b,c，给出下列命题：

①若$a>b,\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则$a>0,b>0$；

②若$a^2>b^2$，则$a>b$；

③若$ac^2>bc^2$，则$a>b$；

④若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$。

其中正确命题的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设$x\in \mathbf{R}$，$a<b$，若"$a\leqslant x\leqslant b$"是"$x^2+x-2\leqslant 0$"的充分不必要条件，则$b-a$的取值范围为

A. $(0,2)$　　B. $(0,2]$

C. $(0,3)$　　D. $(0,3]$

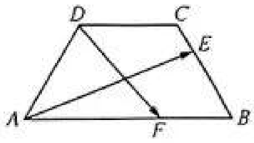
6. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型：$\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$，其中 t 为时间(单位：min)，θ_0 为环境温度，θ_1 为物体初始温度，θ 为冷却后温度. 假设在室内温度为 20 ℃的情况下，一杯饮料由 100 ℃降低到 60 ℃需要 20 min，则此饮料从 60 ℃降低到 40 ℃需要 来源：高三答案公众号

A. 10 min　　B. 20 min　　C. 30 min　　D. 40 min

7. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后得到函数 $y=g(x)$的图象，则函数 $y=f(x)g(x)$ 的最大值为

A. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

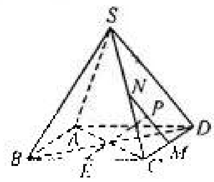
8. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=4$，$BC=CD=2$，若 E，F 分别是边 BC，AB 上的点，且 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=$



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{16}{9}$

C. $\frac{32}{9}$　　D. 5

9. 如图，在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，E，M，N 分别是 BC，CD，SC 的中点，动点 P 在线段 MN 上运动时，下列四个结论：①$EP\perp AC$；②$EP\parallel BD$；③$EP\parallel$平面 SBD；④$EP\perp$平面 SAC，其中恒成立的为



A. ①③　　B. ③④　　C. ①②　　D. ②③④

10. 已知$\{a_n\}$是等比数列，S_n 为其前 n 项和，给出以下命题：

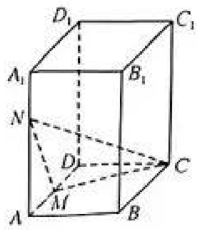
①$\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列；②$\{a_n\cdot a_{n+1}\}$是等比数列；③S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…是等比数列；④$\{\lg|a_n|\}$是等比数列，⑤若 $S_n=a\cdot q^n+b$，则 $a+b=0$. 其中正确命题的个数为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

11. 设实数 $m>0$，若对任意的 $x\geqslant e$，不等式 $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geqslant 0$ 恒成立，则 m 的最大值是

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{e}{3}$　　C. 2e　　D. e

12. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=6$，$AB=3$，$AD=8$，点 M 是棱 AD 的中点，点 N 在棱 AA_1 上，且满足 $AN=2NA_1$，P 是侧面四边形 ADD_1A_1 内一动点(含边界)，若 $C_1P\parallel$平面 CMN，则线段 C_1P 长度的取值范围是



A. $[\sqrt{17},5]$

B. $[4,5]$

C. $[3,5]$

D. $[3,\sqrt{17}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x+y-2\leqslant 0,\\x-2y\leqslant 0\end{cases}$且目标函数 $z=kx+y$ 可以在点$\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$处取到最大值，则 k 的取值范围是________.

14. 已知 $\sin 10^\circ + m\cos 10^\circ = 2\cos 140^\circ$,则 $m=$__________.

15. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中,$SA\perp$平面 $ABCD$,$AB\perp BC$,$\angle BCD+\angle DAB=\pi$,$SA=2$,$BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,二面角 $S-BC-A$ 的大小为$\frac{\pi}{3}$.若四面体 $SACD$ 的四个顶点都在同一球面上,则该球的表面积为__________.

16. 斐波那契数列,又称黄金数列,指的是 1,1,2,3,5,8,13,21,34,…,在现代物理、准晶体结构等领域都有直接应用.对斐波那契数列$\{a_n\}$,其递推公式为:$a_1=a_2=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.已知 S_n 为斐波那契数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $a_{2\,024}=p$,则 $S_{2\,022}=$__________.(结果用 p 表示)

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分 10 分)

在△ABC 中,a,b,c 分别为内角 A,B,C 的对边,$2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{b+c}{a}$,且 BC 边上的中线长为$\sqrt{13}$,$c=6$.

(1)求角 A 的大小;

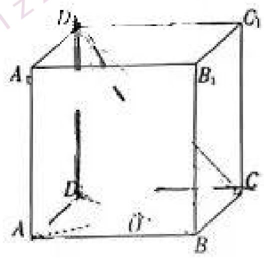
(2)求△ABC 的面积.

18.(本小题满分 12 分)

如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 O 是底面 $ABCD$ 的中心,E 是线段 D_1O 上的一点.

(1)若 E 为 D_1O 的中点,求直线 OD_1 与平面 CDE 所成角的正弦值;

(2)是否存在点 E 使得平面 $CDE\perp$平面 CD_1O?若存在,请求出$\frac{D_1E}{EO}$的值;若不存在,请说明理由.



19.(本小题满分 12 分)

2022 年某开发区一家汽车生产企业计划引进一批新能源汽车制造设备,通过市场分析,全年需投入固定成本 3 000 万元,生产 x(百辆),需另投入成本 $C(x)$万元,且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+200x, 0<x<50,\\ 601x+\frac{10\,000}{x}-9\,000, x\geqslant 50.\end{cases}$ 由市场调研知,每辆车售价 6 万元,且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

(1)求出 2022 年的利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(百辆)的函数关系式;(利润=销售额−成本)

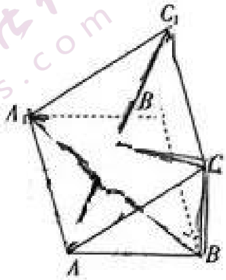
(2)2022 年产量为多少百辆时,企业所获利润最大?并求出最大利润

20.(本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,四边形 BB_1C_1C 是矩形,$AB\perp B_1C_1$,平面 $A_1BC\perp$ 平面 AB_1C_1.

(1)证明:$AA_1=AB$;

(2)若 $B_1C_1=3$,$AB=4$,$\angle ABB_1=60°$,求二面角 $A-A_1C-B$ 的余弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$.$\frac{S_n}{n}=\frac{a_{n+1}}{2}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)在数列$\{b_n\}$中,$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$,其前 n 项和为 T_n,证明:$\frac{1}{4}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-a\sin x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$上恒成立,求实数 a 的最大值;

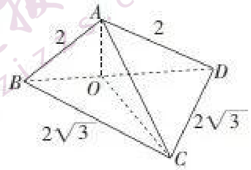
(2)若 $a=2$,求证:$f(x)\geqslant -\ln x\cdot\sin x$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $U=\{x\in \mathbf{Z}|x^2\leqslant 4\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{-1,0,1\}$，所以 $\complement_U A=\{-2,2\}$. 故选 C.

2. D　$z=\frac{2i}{1+i}+1=\frac{2i(1-i)}{2}+1=2+i$，所以 $\bar{z}=2-i$，其所对应点为 $(2,-1)$，位于第四象限. 故选 D.

3. B　由三视图可推知，几何体的直观图如图所示，其中平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AO=1$，所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times 1=\sqrt{3}$. 故选 B.



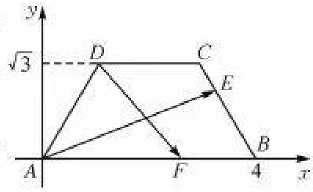
4. B　若 a,b 同号，不可能，则 $a>0,b<0$，所以①错误；若 $a<b<0$，则 $a^2>b^2$，所以②错误；由 $ac^2>bc^2$，知 $c^2>0$，即③成立；由 $a<b<0$，知 $a^2>ab,ab>b^2$，所以④成立. 故选 B.

5. C　设 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，由题意可得 $A\subsetneqq B$，所以 $0<b-a<3$. 故选 C.

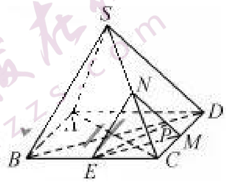
6. B　由题意可得，$\theta_0=20$，$\theta_1=100$，$\theta=60$，$t=20$ 代入 $\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$，$80e^{-20k}+20=60$，解得 $e^{-20k}=\frac{1}{2}$，故 $-20k=-\ln 2$，解得 $k=\frac{\ln 2}{20}$. 当 $\theta_0=20$，$\theta_1=60$，$\theta=40$，$k=\frac{\ln 2}{20}$ 时，将其代入 $\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$ 得 $40e^{-kt}+20=40$，解得 $t=20$. 故选 B.

7. A　由题可知 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=f(x)g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x}{4}=\frac{\sqrt{2}-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{4}$，所以 $y=f(x)g(x)$ 的最大值为 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. 故选 A.

8. C　如图所示建立直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(3,\sqrt{3})$，$D(1,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{CB}=(1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(4,0)$. 又 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\left(\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{8}{3},0\right)$. 则 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=(3,\sqrt{3})+\left(\frac{1}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\left(\frac{8}{3},0\right)-(1,\sqrt{3})=\left(\frac{5}{3},-\sqrt{3}\right)$，故 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{10}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{3},-\sqrt{3}\right)=\frac{32}{9}$. 故选 C.



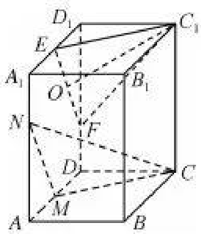
9. A　如图，连接 NE,ME.
$\because E,M,N$ 分别是 BC,CD,SC 的中点，$\therefore EN/\!/SB$，$MN/\!/SD$，$EN\cap MN=N$，$SB\cap SD=S$，$\therefore$ 平面 $SBD/\!/$ 平面 NEM，$\therefore EP/\!/$ 平面 SBD. 故③正确，又由正四棱锥 $S-ABCD$，$\therefore AC\perp$ 平面 SBD，$\therefore AC\perp$ 平面 NEM，$\therefore AC\perp EP$. 故①正确，②④对于线段 MN 上的任意一点 P 不一定成立，故正确的结论为①③. 故选 A.



10. D　若 $a_n+a_{n+1}=0$，数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 不是等比数列，例如数列 $1,-1,1,-1,\cdots$，相邻项相加所构成的数列不是等比数列，故①不正确；$\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n-1}a_n}=q^2$ 是定值，故②正确；与第 1 个相仿，若相加和为零，不能构成等比数列，故③不正确；$\frac{\lg|a_n|}{\lg|a_{n-1}|}$ 不一定为常数，故④错误；⑤正确. 故选 D.

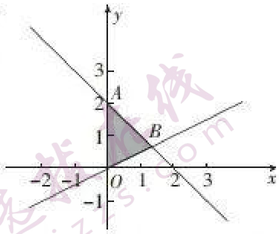
11. D　不等式 $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geqslant 0\Leftrightarrow x^2\ln x\geqslant me^{\frac{m}{x}}\Leftrightarrow x\ln x\geqslant\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Leftrightarrow\ln x\cdot e^{\ln x}\geqslant\frac{m}{x}\cdot e^{\frac{m}{x}}$. 设 $f(x)=x\cdot e^x(x>0)$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 因为 $\frac{m}{x}>0$，$\ln x>0$，所以 $\frac{m}{x}\leqslant\ln x$，即 $m\leqslant x\ln x$ 对任意的 $x\geqslant e$ 恒成立，因此只需 $m\leqslant(x\ln x)_{\min}$. 设 $g(x)=x\ln x(x\geqslant e)$，$g'(x)=\ln x+1>0(x\geqslant e)$，所以 $g(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(x)_{\min}=g(e)=e$，所以 $m\leqslant e$，即 m 的最大值是 e. 故选 D.

12. A　取 A_1D_1 中点 E，在 DD_1 上取点 F，使 $D_1F=2DF$，连接 EF,C_1E,C_1F，则平面 $CMN/\!/$ 平面 C_1EF，$\because P$ 是侧面四边形 ADD_1A_1 内一动点(含边界)，$C_1P/\!/$ 平面 CMN，$\therefore P\in$ 线段 EF，$\therefore$ 当 P 与 EF 的中点 O 重合时，线段 C_1P 长度取最小值 C_1O，当 P 与点 E 或点 F 重合时，线段 C_1P 长度取最大值 C_1E 或 C_1F，$\because$ 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=6$，$AB=3$，$AD=8$，点 M 是棱 AD 的中点，点 N 在棱 AA_1 上，且满足 $AN=2NA_1$，$\therefore|C_1P|_{\max}=C_1E=C_1F=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$EF=4\sqrt{2}$，$|C_1P|_{\min}=C_1O=\sqrt{|C_1E|^2-|EO|^2}=\sqrt{25-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$. $\therefore$ 线段 C_1P 长度的取值范围是



$[\sqrt{17},5]$. 故选 A.

13. $[1,+\infty)$　如图,阴影部分表示不等式组对应的可行域,由 $z=kx+y$,可得 $y=-kx+z$,z 表示直线在 y 轴上的纵截距. 因为 $k_{AB}=-1$,$z=kx+y$ 可以在点 B 处取得最大值,所以 $-k\leqslant-1$,所以 $k\in[1,+\infty)$.



14. $-\sqrt{3}$　由题可得 $m=\dfrac{2\cos 140^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{-2\cos 40^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{-2\cos(30^\circ+10^\circ)-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\dfrac{-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=-\sqrt{3}$.

15. 8π　因为 $\angle BCD+\angle DAB=\pi$,所以 A,B,C,D 四点共圆,又 $AB\perp BC$,故直径是 AC. 因为 $SA\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\perp BC$,所以 $\angle SBA$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角,即 $\angle SBA=\frac{\pi}{3}$. 因为 $SA=2$,所以 $BA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,又 $BC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,所以 $AC=2$. 设球的半径为 R,$2-\sqrt{R^2-1}=\sqrt{R^2-1}$,解得 $R=\sqrt{2}$,该球的表面积为 8π.

16. $p-1$　因为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,所以 $a_3=a_1+a_2$,$a_4=a_2+a_3$,$a_5=a_3+a_4$,$\cdots$,$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$,将以上 n 个式子两边分别相加,得 $S_{n+2}-a_1-a_2=2S_n-a_1+a_{n+1}$,所以 $S_{n+2}=2S_n+a_2+a_{n+1}$,又 $S_{n+2}=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}$,所以 $S_n+a_{n+1}+a_{n+2}=2S_n+a_2+a_{n+1}$,所以 $S_n=a_{n+2}-1$,所以 $S_{2\,022}=a_{2\,024}-1=p-1$.

17. 解:(1)由正弦定理得 $2\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin B+\sin C$,

所以 $\sin A(\sqrt{3}\sin B+\cos B)=\sin B+\sin C$. 来源:高三答案公众号 …………………… 1分

因为 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

所以 $\sin A(\sqrt{3}\sin B+\cos B)=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

即 $\sqrt{3}\sin A\sin B-\sin A\cos B=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$,即 $\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B+\cos A\sin B$,

整理得 $\sin B(\sqrt{3}\sin A-\cos A-1)=0$. …………………… 3分

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B\neq 0$,所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A-1=0$,即 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$,

所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. …………………… 4分

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 5分

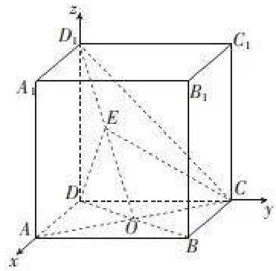
(2)设 BC 的中点为 D,根据向量的平行四边形法则可知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$. …………………… 6分

所以 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=4\overrightarrow{AD}^2$,即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos A=4\overrightarrow{AD}^2$. …………………… 7分

因为 $c=6$,$A=\frac{\pi}{3}$,所以 $6^2+b^2+6b=52$,解得 $b=2$ 或 $b=-8$(舍去). …………………… 8分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$. …………………… 10分

18. 解:不妨设正方体的棱长为 2,以 DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$,则 $D(0,0,0)$,$D_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$O(1,1,0)$. …………………… 1分



(1)因为点 E 是 D_1O 的中点,所以点 E 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

所以 $\overrightarrow{OD_1}=(-1,-1,2)$,$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$.

设 $\boldsymbol{p}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 CDE 的法向量,则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0,\\ 2y_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=2$,则 $y_1=0$,$z_1=-1$,所以平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(2,0,-1)$. …………………… 3分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OD_1},\boldsymbol{p}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OD_1}\cdot\boldsymbol{p}}{|\overrightarrow{OD_1}||\boldsymbol{p}|}=\dfrac{-1\times2+2\times(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}}=-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$. …………………… 5分

所以直线 OD_1 与平面 CDE 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$. …………………… 6分

(2)假设存在点 E 使得平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O,设 $\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{EO}$.

显然 $\overrightarrow{OC}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{OD_1}=(-1,-1,2)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 CD_1O 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OD_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+y_2=0,\\ -x_2-y_2+2z_2=0.\end{cases}$

取 $x_2=1$，则 $y_2=1,z_2=1$，所以平面 CD_1O 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. …………………… 7 分

因为 $\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{EO}$，所以点 E 的坐标为 $(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{2}{\lambda+1})$. …………………… 8 分

所以 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{2}{\lambda+1}\right)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$. 来源：高三答案公众号 …………………… 9分

设 $\boldsymbol{n}=(x_3,y_3,z_3)$ 是平面 CDE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\lambda}{\lambda+1}x_3+\frac{\lambda}{\lambda+1}y_3+\frac{2}{\lambda+1}z_3=0,\\ 2y_3=0.\end{cases}$

取 $x_3=1$，则 $y_3=0,z_3=-\frac{\lambda}{2}$，所以平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,0,-\frac{\lambda}{2}\right)$. …………………… 10 分

因为平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O，所以 $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，即 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$1-\frac{\lambda}{2}=0$，解得 $\lambda=2$. …………………… 11 分

所以 λ 的值为 2. 故存在点 E，使得平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O，且此时 $\frac{D_1E}{EO}=2$. …………………… 12 分

19. 解：(1) 当 $0<x<50$ 时，

$L(x)=6\times100x-10x^2-200x-3\ 000=-10x^2+400x-3\ 000$； …………………… 3 分

当 $x\geqslant50$ 时，

$L(x)=6\times100x-601x-\frac{10\ 000}{x}+9\ 000-3\ 000=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$.

$\therefore L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\ 000,0<x<50,\\ 6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right),x\geqslant50.\end{cases}$ …………………… 5 分

(2) 当 $0<x<50$ 时，$L(x)=-10(x-20)^2+1\ 000$，

$\therefore$ 当 $x=20$ 时，$L(x)_{\max}=L(20)=1\ 000$； …………………… 8 分

当 $x\geqslant50$ 时，$L(x)=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)\leqslant6\ 000-2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=6\ 000-200=5\ 800$，

当且仅当 $x=\frac{10\ 000}{x}$，即 $x=100$ 时，$L(x)_{\max}=L(100)=5\ 800>1\ 000$. …………………… 10 分

$\therefore$ 当 $x=100$，即 2022 年生产 100 百辆时，该企业获得利润最大，且最大利润为 5 800 万元. …………………… 12 分

20. (1) 证明：$\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC/\!/B_1C_1$，$AB\perp B_1C_1$，

$\therefore AB\perp BC$. …………………… 1 分

又 $\because BC\perp BB_1$，$AB\cap BB_1=B$，$AB,BB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore BC\perp$ 平面 AA_1B_1B. …………………… 2 分

设 AB_1 与 A_1B 相交于点 E，AC_1 与 A_1C 相交于点 F，连接 EF，

$\because$ 四边形 AA_1B_1B 与 AA_1C_1C 均是平行四边形，

$\therefore EF/\!/BC$，$EF\perp$ 平面 AA_1B_1B，

$\therefore EF\perp AB_1$，$EF\perp A_1B$，

$\therefore\angle AEA_1$ 是平面 A_1BC 与平面 AB_1C_1 所成其中一个二面角的平面角. …………………… 4 分

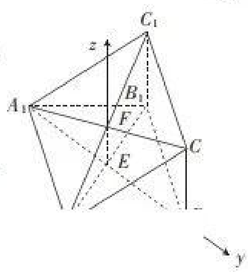
又平面 $A_1BC\perp$ 平面 AB_1C_1，

$\therefore AB_1\perp A_1B$， …………………… 5 分

$\therefore$ 四边形 AA_1B_1B 是菱形，从而 $AA_1=AB$. …………………… 6 分

(2) 解：由 (1) 及题设可知四边形 AA_1B_1B 是菱形，$\angle ABB_1=60^\circ$，

$\therefore AB=AB_1=4$. …………………… 7 分



以 E 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，

$\therefore E(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$A_1(0,-2\sqrt{3},0)$，$C(0,2\sqrt{3},3)$，

$\therefore\overrightarrow{AA_1}=(-2,-2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2\sqrt{3},3)$. …………………… 9 分

设平面 AA_1C 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ -2x+2\sqrt{3}y+3z=0.\end{cases}$

令 $y=-\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{m}=(3,-\sqrt{3},4)$. …………………… 10 分

又由 (1) 可知 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC，

$\therefore$ 可取平面 A_1BC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{EA}=(2,0,0)$， ········· 11 分

$\therefore \cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$. 由图可知二面角 $A-A_1C-B$ 的平面角为锐角，所以它的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$. ········· 12 分

21. (1)解：当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\dfrac{na_{n+1}}{2}-n$，$S_{n-1}=\dfrac{(n-1)a_n}{2}-(n-1)$，

两式相减得 $2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2$， ········· 2 分

整理得 $na_{n+1}-(n+1)a_n=2$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{2}{n(n+1)}$，又 $\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_1}{1}=1$，

$\dfrac{a_n}{n}=\left(\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_{n-1}}{n-1}\right)+\left(\dfrac{a_{n-1}}{n-1}-\dfrac{a_{n-2}}{n-2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{a_3}{3}-\dfrac{a_2}{2}\right)+\left(\dfrac{a_2}{2}-\dfrac{a_1}{1}\right)+a_1$

$=2\left[\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)\right]+1$， ········· 4 分

则 $a_n=3n-2$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，所以 $a_n=3n-2$. ········· 5 分

(2)证明：$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$，

则 $T_n=\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]$ ········· 8 分

$=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{n}{3n+1}$. ········· 9 分

又 $T_{n+1}-T_n=\dfrac{n+1}{3(n+1)+1}-\dfrac{n}{3n+1}=\dfrac{1}{(3n+4)(3n+1)}>0$，

所以数列 $\{T_n\}$ 单调递增，当 $n=1$ 时，T_n 最小值为 $\dfrac{1}{4}$，又因为 $T_n=\dfrac{n}{3n+1}=\dfrac{1}{3+\frac{1}{n}}<\dfrac{1}{3}$， ········· 11 分

所以 $\dfrac{1}{4}\leqslant T_n<\dfrac{1}{3}$. ········· 12 分

22. (1)解：当 $a\leqslant 0$ 时，因为当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x}\geqslant 0$ 显然成立，故此时实数 a 的最大值是 0； ········· 1 分

当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $\dfrac{1}{a}\geqslant\dfrac{\sin x}{e^x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立. ········· 2 分

令 $g(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$，则 $g'(x)=(\cos x-\sin x)e^{-x}$.

①当 $0<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，令 $g'(x)>0$，解得 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，令 $g'(x)<0$，解得 $\dfrac{\pi}{4}<x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$； ········· 4 分

②当 $x>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$g(x)\leqslant\dfrac{1}{e^x}<e^{-\frac{\pi}{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

综上，函数 $g(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$. ········· 5 分

所以 $\dfrac{1}{a}\geqslant g(x)_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$，又 $a>0$，解得 $0<a\leqslant\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. ········· 6 分

综上所述，实数 a 的最大值是 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. ········· 7 分

(2)证明：若 $a=2$，要证 $f(x)\geqslant -\ln x\cdot\sin x$，即证 $e^x+(\ln x-2)\sin x\geqslant 0$. ········· 8 分

令 $h(x)=e^x+(\ln x-2)\sin x$.

当 $x\geqslant e^2$ 时，显然有 $h(x)=e^x+(\ln x-2)\sin x\geqslant e^x-\ln x+2$， ········· 9 分

令 $u(x)=e^x-\ln x+2$，则 $u'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}>0$ 在 $[e^2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $u(x)$ 在 $[e^2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $u(x)\geqslant u(e^2)=e^{e^2}-2+2=e^{e^2}>0$； ········· 10 分

当 $0<x<e^2$ 时，显然有 $h(x)=e^x-(2-\ln x)\sin x\geqslant x+1-(2-\ln x)x=x\left(\dfrac{1}{x}-1-\ln\dfrac{1}{x}\right)$， ········· 11 分

令 $M(x)=x-1-\ln x$，则 $M'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，所以函数 $M(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以

$M(x)_{\min}=M(1)=0$，所以 $M(x)\geqslant 0$，所以 $\dfrac{1}{x}-1-\ln\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即 $h(x)\geqslant 0$.

所以当 $a=2$ 时，$f(x)\geqslant -\ln x\cdot\sin x$. ········· 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。