高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：新高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集为U，集合A,B为U的子集，若$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，则$A\cap B=$

A. $\complement_U B$　　B. $\complement_U A$　　C. B　　D. A

2. 在平面直角坐标系xOy中，角α的顶点为O，始边为x轴的非负半轴，若点$P(-1,2)$是角α终边上的一点，则$\tan(\pi-2\alpha)$等于

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

3. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1(a>0)$的一条渐近线方程为$2x-y=0$，$F_1,F_2$分别是双曲线$C$的左、右焦点，$P$为双曲线$C$上一点，若$|PF_1|=5$，则$|PF_2|=$

A. 1　　B. 1或9　　C. 3或9　　D. 9

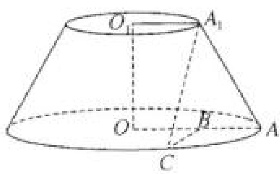
4. 已知复数$z_n=1+i+i^2+\cdots+i^n$（i为虚数单位，$n\in\mathbf{N}^*$），若$M=\{z|z=z_s\cdot z_t(s,t=1,2,\cdots,n)\}$，从$M$中任取一个元素，其模为1的概率为

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{3}{7}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{n}$

5. 生物体的生长都经过发生、发展、成熟三个阶段，每个阶段的生长速度各不相同，通常在发生阶段生长速度较为缓慢、在发展阶段速度加快、在成熟阶段速度又趋于缓慢，按照上述三个阶段生长得到的变化曲线称为生长曲线. 美国生物学家和人口统计学家雷蒙德·皮尔提出一种能较好地描述生物生长规律的生长曲线，称为“皮尔曲线”，常用“皮尔曲线”的函数解析式为$f(x)=\frac{K}{1+a^{kx+b}}(K>0,a>1,k<0)$. 一种刚栽种的果树的生长曲线的函数解析式为$f(x)=\frac{10}{1+3^{kx+b}}(x\in\mathbf{N})$，$x$表示果树生长的年数，$f(x)$表示生长第$x$年果树的高度，若刚栽种时该果树高为1 m，经过一年，该果树高为2.5 m，则$f(4)-f(3)=$

A. 2.5 m　　B. 2 m　　C. 1.5 m　　D. 1 m

6. 如图，圆台OO_1的上底面半径为$O_1A_1=1$，下底面半径为$OA=2$，母线长$AA_1=2$，过OA的中点B作OA的垂线交圆O于点C，则异面直线OO_1与A_1C所成角的大小为



A. 30°　　B. 45°
C. 60°　　D. 90°

7. "杨辉三角"是中国古代数学文化的瑰宝之一，最早在中国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书中出现，欧洲数学家帕斯卡在1654年才发现这一规律，比杨辉要晚近四百年. 在由二项式系数所构成的"杨辉三角"中(如下图)，记第2行的第3个数字为a_1、第3行的第3个数字为a_2，……，第n $(n\geqslant 2)$行的第3个数字为a_{n-1}，则$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=$

第0行　1
第1行　1　1
第2行　1　2　1
第3行　1　3　3　1
第4行　1　4　6　4　1
第5行　1　5　10　10　5　1
……　……　……　……

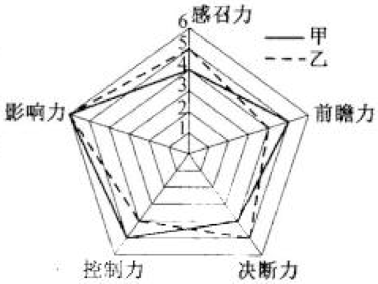
A. 220　　B. 186　　C. 120　　D. 96

8. 已知点P在直线$x+y=4$上，过点P作圆$O:x^2+y^2=4$的两条切线，切点分别为A,B，则点$M(3,2)$到直线AB距离的最大值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 在管理学研究中，有一种衡量个体领导力的模型，称为"五力模型"，即一个人的领导力由五种能力——影响力、控制力、决断力、前瞻力和感召力构成. 右图是某企业对两位领导人领导力的测评图，其中每项能力分为三个等级，"一般"记为4分、"较强"记为5分、"很强"记为6分，把分值称为能力指标，则下列判断正确的是



A. 甲、乙的五项能力指标的均值相同

B. 甲、乙的五项能力指标的方差相同

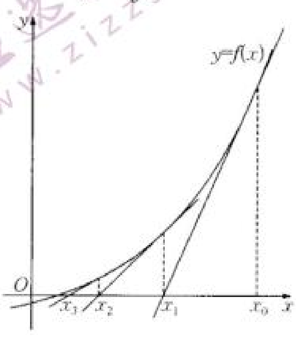
C. 如果从控制力、决断力、前瞻力考虑，乙的领导力高于甲的领导力

D. 如果从影响力、控制力、感召力考虑，甲的领导力高于乙的领导力

10. 已知两个不为零的实数x,y满足$x<y$，则下列结论正确的是

A. $3^{|x-y|}>1$　　B. $xy<y^2$　　C. $x|x|<y|y|$　　D. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<e^x-e^y$

11. 英国数学家牛顿在17世纪给出了一种求方程近似根的方法——牛顿迭代法，做法如下：如图，设r是$f(x)=0$的根，选取x_0作为r的初始近似值，过点$(x_0,f(x_0))$作曲线$y=f(x)$的切线$l:y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，则$l$与$x$轴的交点的横坐标$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$，称$x_1$是$r$的一次近似值；过点$(x_1,f(x_1))$作曲线$y=f(x)$的切线，则该切线与$x$轴的交点的横坐标为$x_2$，称$x_2$是$r$的二次近似值；重复以上过程，得$r$的近似值序列，其中$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(f'(x_n)\neq 0)$，称$x_{n+1}$是$r$的$n+1$次近似值，这种求方程$f(x)=0$近似解的方法称为牛顿迭代法. 若使用该方法求方程$x^2=2$的近似解，则



A. 若取初始近似值为1，则该方程解的二次近似值为$\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为2，则该方程解的二次近似值为$\frac{17}{12}$

C. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}+\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin^n x+\cos^n x(n\in\mathbf{N}^*)$，则

A. 对任意正奇数 n，$f(x)$ 为奇函数

B. 当 $n=4$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

C. 当 $n=3$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 对任意正整数 n，$f(x)$ 的图象都关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

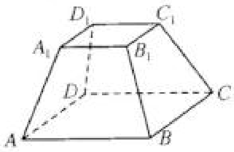
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为__________.

14. 请写出一个函数 $f(x)=$____________________，使之同时具有如下性质：① $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(4-x)$，② $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+4)=f(x)$.

15. 已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 AB 过 F_1 与椭圆交于 A,B 两点，当 $\triangle F_2AB$ 为正三角形时，该椭圆的离心率为____________.

16. 在上、下底面均为正方形的四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=\sqrt{2}$，$AB=2$，$A_1B_1=1$，则该四棱台的表面积为__________；该四棱台外接球的体积为__________.（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

在等比数列 $\{a_n\}$ 中，公比 $q>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=6$，____________.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\log_{a_n}2$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，$c_{n+1}-c_n=b_{n+1}b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

从① $S_4=30$，② $S_6-S_4=96$，③ a_3 是 S_3 与 2 的等差中项，这三个条件中任选一个，补充到上面问题中的横线上，并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按照第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b\cos C=a+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，点 D 在边 AC 上，且 $AD=2DC$，$BD=2$.

(1) 求角 B 的大小；

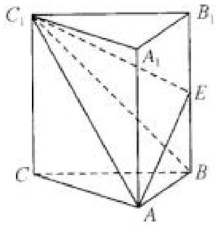
(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19.（本小题满分 12 分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$\triangle ABC$ 为正三角形，$AB=AA_1=2$，E 是 BB_1 的中点.

(1) 求证：平面 $AEC_1\perp$ 平面 AA_1C_1C；

(2) 求二面角 $B-AC_1-E$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l. 设过点 F 且不与 x 轴平行的直线 m 与抛物线 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，过 M 作直线垂直于 l，垂足为 N，直线 MN 与抛物线 C 交于点 P.

(1)求证：点 P 是线段 MN 的中点.

(2)若抛物线 C 在点 P 处的切线与 y 轴交于点 Q，问是否存在直线 m，使得四边形 $MPQF$ 是有一个内角为 60° 的菱形？若存在，请求出直线 m 的方程；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

现代战争中，经常使用战斗机携带空对空导弹攻击对方战机，在实际演习中空对空导弹的命中率约为 20%，由于飞行员的综合素质和经验的不同，不同的飞行员使用空对空导弹命中对方战机的概率也不尽相同. 在一次演习中，红方的甲、乙两名优秀飞行员发射一枚空对空导弹命中蓝方战机的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{4}$，两名飞行员各携带 4 枚空对空导弹.

(1)甲飞行员单独攻击蓝方一架战机，连续不断地发射导弹攻击，一旦命中或导弹用完即停止攻击，各次攻击相互独立，求甲飞行员能够命中蓝方战机的概率？

(2)蓝方机群共有 8 架战机，若甲、乙共同攻击（战机均在攻击范围之内，每枚导弹只攻击其中一架战机，甲、乙不同时攻击同一架战机）.

①若一轮攻击中，每人只有两次进攻机会，记一轮攻击中，击中蓝方战机数为 X，求 X 的分布列；

②若实施两轮攻击（用完携带的导弹），记命中蓝方战机数为 Y，求 Y 的数学期望 $E(Y)$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+x+1(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若不等式 $x^a f(x)\leqslant e^x$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，所以 $B\subseteq A$，所以 $A\cap B=B$. 故选 C.

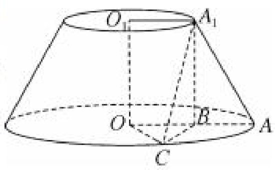
2. B　由题意，得 $\tan\alpha=-2$，从而 $\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\dfrac{2\times(-2)}{1-(-2)^2}=-\dfrac{4}{3}$. 故选 B.

3. D　由题意知 $\dfrac{4}{a}=2$，所以 $a=2$，所以 $c=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，所以 $|PF_1|=5<2+2\sqrt{5}=a+c$，所以点 P 在双曲线 C 的左支上，所以 $|PF_2|-|PF_1|=4$，所以 $|PF_2|=9$. 故选 D.

4. B　因为 $z_n=1+i+i^2+\cdots+i^n=\dfrac{1-i^{n+1}}{1-i}$，所以 $z_n=1+i,i,0,1,1+i,i,0,1,\cdots$，即 z_n 的取值只有四个数 $1+i,i,0,1$，所以 $M=\{0,1,-1,i,2i,1+i,-1+i\}$，$M$ 中共 7 个元素，其中模为 1 的有三个元素，故所求概率为 $\dfrac{3}{7}$. 故选 B.

5. C　根据已知 $f(0)=1$ m，$f(1)=2.5$ m，得 $1+3^b=10$ 且 $1+3^{k+b}=4$，得 $b=2$，$k=-1$，所以 $f(x)=\dfrac{10}{1+3^{-x+2}}$，从而 $f(3)=\dfrac{10}{1+3^{-1}}=\dfrac{30}{4}=7.5$ m，$f(4)=\dfrac{10}{1+3^{-2}}=9$ m，所以 $f(4)-f(3)=1.5$ m. 故选 C.

6. B　在直角梯形 OO_1A_1A 中，因为 B 为 OA 的中点，$OA=2$，所以 $O_1A_1=OB=AB=1$，连接 A_1B，易证四边形 OO_1A_1B 为矩形，所以 $OO_1\,/\!/\,A_1B$，所以 $\angle BA_1C$ 为异面直线 OO_1 与 A_1C 所成的角，在直角三角形 AA_1B 中，$AA_1=2$，所以 $A_1B=\sqrt{3}$；连接 OC，在直角三角形 OBC 中，由 $OB=1$，$OC=2$，得 $BC=\sqrt{3}$；在直角三角形 A_1BC 中，$BC=A_1B$，所以 $\angle BA_1C=45^\circ$. 故选 B.



7. A　$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_3^3+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_4^3+C_4^2+\cdots+C_{11}^2=C_5^3+C_5^2+\cdots+C_{11}^2=\cdots=C_{12}^3=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$. 故选 A.

8. D　设 $P(a,b)$，则 $a+b=4$，以 OP 为直径的圆的方程是 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(a^2+b^2)$，与圆 O 的方程 $x^2+y^2=4$ 相减，得直线 AB 的方程为 $ax+by=4$，即 $ax+by-4=0$，因为 $a+b=4$，所以 $b=4-a$，代入直线 AB 的方程，得 $ax+(4-a)y-4=0$，即 $a(x-y)+4y-4=0$，当 $x=y$ 且 $4y-4=0$，即 $x=1,y=1$ 时该方程恒成立，所以直线 AB 过定点 $N(1,1)$，点 M 到直线 AB 距离的最大值即为点 M,N 之间的距离，$|MN|=\sqrt{5}$，所以点 $M(3,2)$ 到直线 AB 距离的最大值为 $\sqrt{5}$. 故选 D.

9. AB　甲的五项能力指标为 6,5,4,5,4，平均值为 $\dfrac{6+5+4+5+4}{5}=4.8$；

乙的五项能力指标为 6,4,5,4,5，平均值为 $\dfrac{6+4+5+4+5}{5}=4.8$，则 A 正确；

由于均值相同，各项指标数也相同（只是顺序不同），所以方差也相同，则 B 正确；

从控制力、决断力、前瞻力考虑，甲的均值为 $\dfrac{14}{3}$，乙的均值为 $\dfrac{13}{3}$，所以甲的领导力高于乙的领导力，则 C 不正确；

从影响力、控制力、感召力考虑，甲、乙的指标均值相同，方差也相同，所以甲、乙水平相当，则 D 不正确. 故选 AB.

10. AC　因为 $x<y$，所以 $|x-y|>0$，所以 $3^{|x-y|}>1$，则 A 正确；因为 $x<y$，当 $y>0$ 时，$xy<y^2$，当 $y<0$ 时，$xy>y^2$，则 B 错误；令 $f(x)=x|x|$，易知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $x<y$，所以 $f(x)<f(y)$，即 $x|x|<y|y|$，则 C 正确；对于 D，法一：令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-e^x$，易知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不妨设 $0<x<y$，则 $g(x)>g(y)$，即 $\dfrac{1}{x}$

$-e^x>\frac{1}{y}-e^y$,亦即$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>e^x-e^y$,则D错误;法二:取$x=-1,y=1$,则$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-2>e^{-1}-e$,则D错误. 故选AC.

11. ABC　构造函数$f(x)=x^2-2$,则$f'(x)=2x$,取初始近似值$x_0=1$,则$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\frac{1-2}{2\times1}=\frac{3}{2}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12}$,则A正确;

取初始近似值$x_0=2$,则$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4-2}{2\times2}=\frac{3}{2}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12}$,则B正确;

根据题意,可知$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$,$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$,$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$,上述四式相加,得$x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$,则D不正确,C正确. 故选ABC.

12. CD　取$n=1$,则$f(x)=\sin x+\cos x$,从而$f(0)=1\neq0$,此时$f(x)$不是奇函数,则A错误;当$n=4$时,$f(x)=\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1-\cos4x}{4}=\frac{1}{4}\cos4x+\frac{3}{4}$,则$f(x)$的递增区间为$\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$,则B错误;

当$n=3$时,$f'(x)=3\sin^2x\cos x-3\cos^2x\sin x=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$,当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$时,$f'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以$f(x)$的最小值为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故C正确;因为$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^nx+\sin^nx=f(x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称,则D正确. 故选CD.

13. $\frac{2\pi}{3}$　设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角为$\theta$,由$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|$,得$|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+4|\boldsymbol{b}|^2=3|\boldsymbol{a}|^2$,结合$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,解得$\cos\theta=-\frac{1}{2}$,又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以$\theta=\frac{2\pi}{3}$.

14. $\cos\frac{\pi}{2}x$　性质①②分别表示$f(x)$关于直线$x=2$对称和以4为周期. 答案不唯一,写出一个即可.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　不妨设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,根据椭圆定义,$|AF_1|=2a-|AF_2|$,$|BF_1|=2a-|BF_2|$,$\triangle F_2AB$为正三角形,$|AF_2|=|BF_2|$,所以$|AF_1|=|BF_1|$,即$F_1$为线段$AB$的中点,根据椭圆的对称性知$AB$垂直于$x$轴. 设$|F_1F_2|=2c$,则$|AF_1|=2c\tan30°=\frac{2\sqrt{3}c}{3}$,$|AF_2|=\frac{2c}{\cos30°}=\frac{4\sqrt{3}c}{3}$. 因为$|AF_1|+|AF_2|=2a$,即$2\sqrt{3}c=2a$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. $5+3\sqrt{7}$(2分)　$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$(3分)　在等腰梯形DCC_1D_1中,过C_1作$C_1H\perp DC$,垂足为H,易求$CH=\frac{1}{2}$,$C_1H=\frac{\sqrt{7}}{2}$,则四棱台的表面积为$S=S_{上底}+S_{下底}+S_{侧}=1+4+4\times\frac{(1+2)}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}=5+3\sqrt{7}$. 设$AC\cap BD=O$,$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$. 由棱台的性质,可将该棱台补成四棱锥(如右图),因为$AB=2$,$A_1B_1=1$,可知$\triangle SA_1B_1$与$\triangle SAB$相似比为$1:2$;则$SA=2AA_1=2\sqrt{2}$,AO

$=\sqrt{2}$，则 $SO=\sqrt{6}$，则 $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，即该四棱台的高为$\frac{\sqrt{6}}{2}$. 由于上、下底面都是正方形，则外接球的球心在 OO_1 上，在平面 B_1BOO_1 上，由于 $OO_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$B_1O_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $OB_1=\sqrt{2}=OB$，即点 O 到点 B 与到点 B_1 的距离相等，同理 O 到 A,A_1,C,C_1,D,D_1 的距离均为$\sqrt{2}$，于是 O 为外接球的球心，且外接球的半径 $r=\sqrt{2}$，故该四棱台外接球的体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

17. 解：(1)若选①$S_4=30$.

由 $S_2=6$ 及 $S_4=30$，得 $a_1+a_2=6$，$a_1+a_2+a_3+a_4=30$，

两式相减，得 $a_3+a_4=24$，…… 2分

即 $q^2(a_1+a_2)=24$，所以 $q^2=4$，由 $q>0$，得 $q=2$，…… 3分

代入 $a_1+a_2=6$，得 $a_1+2a_1=6$，解得 $a_1=2$. …… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

若②$S_6-S_4=96$.

因为 $S_6-S_4=a_5+a_6=96$，$a_1+a_2=6$，所以 $a_1q^4+a_1q^5=96$，$a_1+a_1q=6$，…… 2分

两式相除，得 $q^4=16$，结合 $q>0$，得 $q=2$，…… 3分

所以 $a_1+2a_1=6$，解得 $a_1=2$，…… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

若选③a_3 是 S_3 与 2 的等差中项.

由 a_3 是 S_3 与 2 的等差中项，得 $2a_3=S_3+2$，

则 $2a_3=a_1+a_2+a_3+2$，

由 $a_1+a_2=6$，得 $a_3=8$，…… 2分

由通项公式，得 $a_1+a_1q=6$，$a_1q^2=8$，

消去 a_1，得 $3q^2-4q-4=0$，结合 $q>0$，解得 $q=2$，…… 3分

代入 $a_1+a_1q=6$，得 $a_1=2$，…… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$. …… 5分

(2)由(1)，得 $b_n=\log_{a_n}2=\frac{1}{\log_2 a_n}=\frac{1}{\log_2 2^n}=\frac{1}{n}$. …… 6分

$c_{n+1}-c_n=b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…… 7分

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+(c_4-c_3)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$

$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$. …… 9分

又 $c_1=1$ 也适合上式，故数列$\{c_n\}$的通项公式是 $c_n=2-\frac{1}{n}$. …… 10分

18. 解：(1)由 $b\cos C=a+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$ 及正弦定理，得 $\sin B\cos C=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B$，…… 2分

又 $A=\pi-(B+C)$，所以 $\sin B\cos C=\sin(B+C)+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C$，即 $\cos B\sin C+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=0$，…… 4分

因为 $0<C<\pi$，$\sin C\neq 0$，所以 $\tan B=-\sqrt{3}$，

又 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{2\pi}{3}$. …… 6分

(2)方法 1：因为点 D 在边 AC 上，且 $AD=2DC$，所以

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, ………………………………………… 7 分

$\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2$,即 $4=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}ac\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{4}{9}a^2$,即 $4a^2+c^2-2ac=36$. …………………… 8 分

由 $4a^2+c^2\geqslant 4ac$,可得 $4ac-2ac\leqslant 36$,即 $ac\leqslant 18$,当且仅当 $2a=c$ 时,等号成立, ……………………………… 10 分

所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times 18\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $2a=c$,即 $a=3,c=6$ 时等号成立. ……………… 12 分

方法 2. 设 $DC=t$,则 $AD=2t$,$\angle ADB=\theta$,

在$\triangle ABD$ 中,由余弦定理,得 $c^2=4+4t^2-2\times 2\times 2t\cos\theta$,即 $c^2=4+4t^2-8t\cos\theta$; ①

同理,在$\triangle BCD$ 中,由余弦定理,得 $a^2=4+t^2+4t\cos\theta$. ②

由①②消掉 $\cos\theta$,得 $c^2+2a^2=12+6t^2$. ③ ………………………………………………………… 7 分

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $9t^2=a^2+c^2+ac$,即 $t^2=\frac{a^2+c^2+ac}{9}$. ④

把④代入③,得 $4a^2+c^2-2ac=36$. ………………………………………………………………… 8 分

由 $4a^2+c^2\geqslant 4ac$,可得 $4ac-2ac\leqslant 36$,即 $ac\leqslant 18$,所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times 18\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,当且仅当 $2a=c$,

即 $a=3,c=6$ 时等号成立. ………………………………………………………………………… 12 分

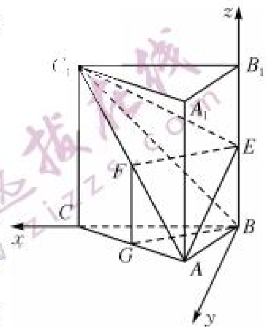
19.(1)证明:取 AC_1 的中点 F,取 AC 的中点 G,连接 EF,FG,BG.

因为 E 是 BB_1 的中点,所以 $BE/\!/CC_1$,$BE=\frac{1}{2}CC_1$. ………………………………………… 1 分

因为 FG 是$\triangle ACC_1$ 的中位线,所以 $FG/\!/CC_1$,$FG=\frac{1}{2}CC_1$, ……………………………… 2 分

所以 $BE/\!/FG$,$BE=FG$,

所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形,所以 $EF/\!/BG$. ……………………………… 3 分



因为$\triangle ABC$ 为正三角形,G 为 AC 的中点,所以 $BG\perp AC$.

因为 $AA_1\perp$底面 ABC,$BG\subset$底面 ABC,所以 $AA_1\perp BG$,

所以 $EF\perp AC$,$EF\perp AA_1$.

又 $AA_1\cap AC=A$,$A_1A,AC\subset$平面 AA_1C_1C,所以 $EF\perp$平面 AA_1C_1C. ……………… 4 分

又 $EF\subset$平面 AEC_1,所以平面 $AEC_1\perp$平面 AA_1C_1C. ……………………………… 5 分

(2)解:以 B 为原点,分别以$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BB_1}$的方向为 x 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系

$B-xyz$(如图所示),

则 $B(0,0,0)$,$A(1,\sqrt{3},0)$,$C_1(2,0,2)$,$E(0,0,1)$. …………………………………………………… 6 分

从而$\overrightarrow{AC_1}=(1,-\sqrt{3},2)$,$\overrightarrow{BA}=(1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{EC_1}=(2,0,1)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ x-\sqrt{3}y+2z=0,\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$,则$\begin{cases}y=-1,\\ z=-\sqrt{3},\end{cases}$ 所以平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{3})$. ……………………………… 8 分

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2a+c=0,\\ a-\sqrt{3}b+2c=0,\end{cases}$

取 $a=1$,则$\begin{cases}b=-\sqrt{3},\\ c=-2,\end{cases}$ 所以平面 AEC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},-2)$. ……………………………… 10 分

设向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

由图知，二面角 $B-AC_1-E$ 为锐二面角，

所以二面角 $B-AC_1-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………… 12分

20.(1)证明：由题意知直线 m 的斜率存在且不为0，故设直线 m 的方程为 $y=kx+1(k\neq0)$，

代入 $x^2=4y$，并整理得 $x^2-4kx-4=0$.

所以 $\Delta=16k^2+16>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$. ………… 2分

设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2k$，$y_0=kx_0+1=2k^2+1$，即 $M(2k,2k^2+1)$. ………… 3分

由 $MN\perp l$，得 $N(2k,-1)$，

所以 MN 中点的坐标为 $(2k,k^2)$.

将 $x=2k$ 代入 $x^2=4y$，解得 $y=k^2$，则 $P(2k,k^2)$，所以点 P 是 MN 的中点. ………… 5分

(2)解：由 $x^2=4y$，得 $y=\dfrac{x^2}{4}$，则 $y'=\dfrac{x}{2}$，

所以抛物线 C 在点 $P(2k,k^2)$ 处的切线 PQ 的斜率为 k， ………… 6分

又由直线 m 的斜率为 k，可得 $m/\!/PQ$；

又 $MN/\!/y$ 轴，所以四边形 $MPQF$ 为平行四边形. ………… 7分

而 $|MF|=\sqrt{(2k)^2+(2k^2+1-1)^2}=2\sqrt{k^2(k^2+1)}$，$|MP|=|(2k^2+1)-k^2|=k^2+1$，

由 $|MF|=|MP|$，得 $2\sqrt{k^2(k^2+1)}=k^2+1$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即当 $k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，四边形 $MPQF$ 为菱形. ………… 9分

且此时 $|PF|=\sqrt{(2k-0)^2+(k^2-1)^2}=k^2+1=|MP|=|MF|$，所以 $\angle PMF=60^\circ$，

直线 m 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+1$，即 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$，或 $x+\sqrt{3}y-\sqrt{3}=0$， ………… 11分

所以存在直线 m，使得四边形 $MPQF$ 是有一个内角为 60° 的菱形. ………… 12分

21.解：设甲、乙两名飞行员发射的第 i 枚导弹命中对方战机分别为事件 A_i，B_i，则 $P(A_i)=\dfrac{1}{3}$，$P(B_i)=\dfrac{1}{4}$.

(1)设甲飞行员能够击中蓝方战机为事件 M，则 $M=A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4$， ………… 1分

所以 $P(M)=P(A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)$

$=P(A_1)+P(\overline{A_1}\cdot A_2)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)$

$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{65}{81}$. ………… 4分

(2)①$X=0,1,2,3,4$，则

$P(X=0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$， ………… 5分

$P(X=1)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{12}$， ………… 6分

$P(X=2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{37}{144}$， ………… 7分

$P(X=3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{72}$， ………… 8分

$P(X=4)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{144}$. …… 9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{37}{144}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{144}$

…… 10 分

②记两轮攻击中甲命中战机数为 Y_1，则 $Y_1\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，乙命中战机数为 Y_2，则 $Y_2\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$，

所以 $E(Y)=E(Y_1)+E(Y_2)=\frac{4}{3}+\frac{4}{4}=\frac{7}{3}$. …… 12 分

22. 解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

(1) $f'(x)=\frac{a}{x}+1=\frac{x+a}{x}$， …… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； …… 2 分

当 $a<0$ 时，若 $0<x<-a$，则 $f'(x)<0$；若 $x>-a$，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,-a)$ 上单调递减，在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增. …… 4 分

(2) 由 $x^e f(x)\leqslant e^x$，得 $x^e(a\ln x+x+1)\leqslant e^x$，

因为 $x>1$，所以 $a\ln x+x+1\leqslant x^{-e}e^x$，$\ln x>0$，

所以 $a\leqslant\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}$. …… 5 分

$x^{-e}e^x-x-1=e^{\ln x^{-e}}e^x-x-1=e^{x-e\ln x}-x-1$.

设 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$.

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$；当 $x=0$ 时，$g'(x)=0$；当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，

所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=0$，即对任意 $x\in\mathbf{R}$，$e^x\geqslant x+1$（当且仅当 $x=0$ 时等号成立）. …… 7 分

所以 $e^{x-e\ln x}\geqslant x-e\ln x+1$，即 $e^{x-e\ln x}-x-1\geqslant -e\ln x$（当且仅当 $x-e\ln x=0$ 时等号成立）. …… 9 分

令 $h(x)=x-e\ln x$，则 $h'(x)=1-\frac{e}{x}=\frac{x-e}{x}$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $x=e$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，

所以 $h(x)_{\min}=h(e)=0$，即当且仅当 $x=e$ 时，$x-e\ln x=0$， …… 10 分

所以 $\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}\geqslant\frac{-e\ln x}{\ln x}=-e$，即 $\left(\frac{x^{-e}e^x-x-1}{\ln x}\right)_{\min}=-e$（当且仅当 $x=e$ 时等号成立），

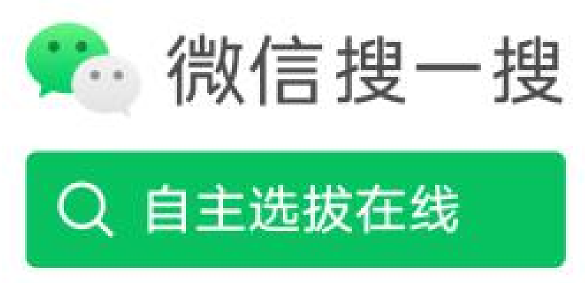
所以 $a\leqslant -e$ 时，$x^e f(x)\leqslant e^x$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-e]$. …… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》