

2022—2023 学年度上学期高三期末考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题

1.B 2.A 3.D 4.A 5.B 6. B 7.C 8.A

二、多项选择题

9.BD 10.AC 11.ABC 12.BC

三、填空题

13.4 或 5 14.-120 15. $2\sqrt{6}$ 16. 0, -100

四、解答题

17.解: (1) $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 B - 2\sin B \sin C + \sin^2 C = \sin^2 A - \sin B \sin C$

即: $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$

由正弦定理可得: $b^2 + c^2 - a^2 = bc$2 分

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$

$A \in (0, \pi)$ 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 4 分

(2) 由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$

即 $b = 2\sqrt{3} \sin B, c = 2\sqrt{3} \sin C$,5 分

$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \sin B \cdot 2\sqrt{3} \sin C \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \sin B \sin C$

$= 3\sqrt{3} \sin B \sin \left(\frac{\pi}{3} + B \right) = 3\sqrt{3} \sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right)$

$$= 3\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2B + \frac{1 - \cos 2B}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left[2 \sin \left(2B - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \right] \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以

$$B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right), 2B - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\sin \left(2B - \frac{\pi}{6} \right) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right], 2 \sin \left(2B - \frac{\pi}{6} \right) + 1 \in (2, 3],$$

$$\text{即 } S_{ABC} \in \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{4} \right].$$

18. 解: (1) $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3a_n+1}, \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{2a_n},$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2a_n} + \frac{3}{2}, \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - 3 \right), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a_1 = \frac{2}{7}, \therefore \frac{1}{a_1} - 3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2},$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} - 3 \right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 解: 由 (1) 可知, $\therefore \frac{1}{a_n} - 3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n, \therefore \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3,$

$$\therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3n = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3n, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

若 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < 100$, 则 $1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n + 3n < 100, \therefore 3n - \left(\frac{1}{2} \right)^n < 99,$

令 $f(x) = 3x - \left(\frac{1}{2} \right)^x - 99$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

且 $f(33) = 99 - \left(\frac{1}{2} \right)^{33} - 99 < 0, f(34) = 102 - \left(\frac{1}{2} \right)^{34} - 99 > 0,$

所以满足条件的最大正整数 $n = 33$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19.解: 19 解: (1) 众数: 8.6; 中位数: 8.75;2 分

(2) 设 A_i 表示所取 3 人中有 i 个人是“超级幸福”, 至少有 2 人是“超级幸福”记为事件

$$A, \quad \text{则 } P(A) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{C_4^2 C_{12}^1}{C_{16}^3} + \frac{C_4^3}{C_{16}^3} = \frac{19}{140} \quad \text{.....6 分}$$

(3) 由题意可知, ξ 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4

每个人超级幸福的概率 $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$

$$P(\xi=0) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}, P(\xi=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$P(\xi=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}, P(\xi=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64},$$

$$P(\xi=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \quad \text{.....10 分}$$

所以 ξ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

因为 $\xi \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$, 所以 $E(\xi) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ 12 分

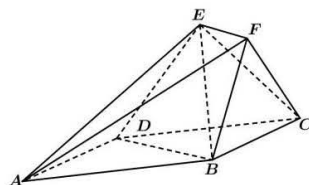
20. 解: (1) 设 O 是 CD 中点, G 是 BC 中点, 如下图所示.

由于 $CE = DE$, 所以 $OE \perp CD$, 由于平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $EDC \cap$ 平面 $DBC = DC$, 所以 $OE \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $OE \perp OB$3 分

由于 G 是 BC 的中点, 所以 $OG \parallel BD, OG = \frac{1}{2} BD$, 而

$$EF \parallel BD, EF = \frac{1}{2} BD,$$

所以 $EF \parallel OG, EF = OG$, 所以四边形 $EFGO$ 是平行四边形, 所以 $FG \parallel OE$,



由于 $FG \subset$ 平面 BCF ，所以平面 $BCF \perp$ 平面 $ABCD$6 分

(2) 由于四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ，所以三角形 BCD 是等边三角形，

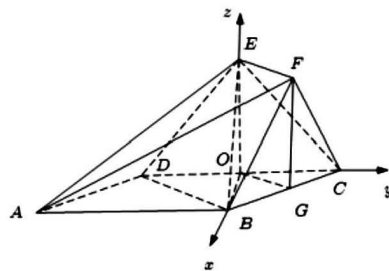
$OB = \sqrt{3}$, $OB \perp CD$. 由于 $OE \perp$ 平面 $ABCD$ 所以 $\angle OBE$ 是直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角，所以

$$\sin \angle OBE = \frac{OE}{\sqrt{OE^2 + OB^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 解得 } OE = 3\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

以 O 为空间坐标原点建立如图所示空间直角坐标系，则

$$E(0, 0, 3\sqrt{3}), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right), A(\sqrt{3}, -2, 0), C(0, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{EA} = (\sqrt{3}, -2, -3\sqrt{3}), \overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$



设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EA} = \sqrt{3}x - 2y - 3\sqrt{3}z = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}, \text{ 故可 } \mathbf{n} = (1, -\sqrt{3}, 1) \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又 $\overrightarrow{EC} = (0, 1, -3\sqrt{3})$ ，设 C 到平面 AEF 的距离为 d ，则

$$d = \frac{|\overrightarrow{EC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(0, 1, -3\sqrt{3}) \cdot (1, -\sqrt{3}, 1)|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{15}}{5} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解：直线 $l_1: y = k_1x - \frac{1}{2}$, $l_2: y = k_2x - \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = k_1x - \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (1 + 4k_1^2)x^2 - 4k_1x - 3 = 0,$$

$$\text{显然 } \Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{4k_1}{1 + 4k_1^2}, x_1x_2 = \frac{-3}{1 + 4k_1^2}, \therefore \frac{k_1x_1x_2}{x_1 + x_2} = -\frac{3}{4} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

同理可得 $\frac{k_2 x_3 x_4}{x_3 + x_4} = -\frac{3}{4}$, 所以 $\frac{k_1 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{k_2 x_3 x_4}{x_3 + x_4}$ 4 分

(2) 设 $P(x_p, -\frac{1}{2})$, $Q(x_q, -\frac{1}{2})$

由已知可得 $y_1 \neq y_3, y_2 \neq y_4$, 即 $k_1 x_2 \neq k_2 x_4, k_1 x_1 \neq k_2 x_3$

因为 A, P, C 共线, 有 $\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = \frac{y_1 + \frac{1}{2}}{x_1 - x_p}$, 即 $\frac{(k_1 x_1 - \frac{1}{2}) - (k_2 x_3 - \frac{1}{2})}{x_1 - x_3} = \frac{k_1 x_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{x_1 - x_p}$,

解得 $x_p = \frac{(k_2 - k_1)x_1 x_3}{k_2 x_3 - k_1 x_1}$, 同理可得 $x_q = \frac{(k_2 - k_1)x_2 x_4}{k_2 x_4 - k_1 x_2}$ 6 分

又由(1)知 $\frac{k_1 x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{k_2 x_3 x_4}{x_3 + x_4}$, 可得 $k_1 x_1 x_2 (x_3 + x_4) = k_2 x_3 x_4 (x_1 + x_2)$, 整理得

$$x_1 x_3 (k_1 x_2 - k_2 x_4) = x_2 x_4 (k_2 x_3 - k_1 x_1), \text{ 即 } \frac{x_1 x_3}{(k_2 x_3 - k_1 x_1)} = \frac{x_2 x_4}{(k_1 x_2 - k_2 x_4)} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$x_p + x_q = \frac{(k_2 - k_1)x_1 x_3}{k_2 x_3 - k_1 x_1} + \frac{(k_2 - k_1)x_2 x_4}{k_2 x_4 - k_1 x_2} = (k_2 - k_1) \left(\frac{x_1 x_3}{k_2 x_3 - k_1 x_1} + \frac{x_2 x_4}{k_2 x_4 - k_1 x_2} \right) = 0$$

所以 $|x_p| = |x_q|$, $|PM| = |x_p| = |x_q| = |QM|$, 即 $\frac{|PM|}{|QM|} = 1$ 12 分

22. 解: (1) $f(x) = a - \frac{b}{x^2}$, 则有 $\begin{cases} f(1) = a + b + c = 0, \\ f'(1) = a - b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = a - 1 \\ c = 1 - 2a \end{cases}$ 2 分

(2) 由(1)知, $f(x) = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a$,

令 $g(x) = f(x) - \ln x = ax + \frac{a-1}{x} + 1 - 2a - \ln x, x \in [1, +\infty)$,

则 $g(1)=0$, $g(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}=\frac{a(x-1)(x-\frac{1-a}{a})}{x^2}$ 4 分

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} > 1$.

若 $1 < x < \frac{1-a}{a}$, 则 $g(x) < 0$, $g(x)$ 是减函数, 所以 $g(x) < g(1)=0$, 这与题意不符.

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1-a}{a} \leq 1$.

若 $x \geq 1$, 则 $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 是增函数, 所以 $g(x) \geq g(1)=0$, 即 $f(x)-\ln x \geq 0$ 恒成立.

综上所述, 所求 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 8 分

(3) 由 (2) 知: 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 有 $f(x) \geq \ln x (x \geq 1)$, 令 $a = \frac{1}{2}$, 有

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) \geq \ln x (x \geq 1), \text{ 且当 } x > 1 \text{ 时, } \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) > \ln x,$$

$$\text{令 } x = \frac{k+1}{k}, \text{ 有 } \ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{2}(\frac{k+1}{k} - \frac{k}{k+1}) = \frac{1}{2}[(1 + \frac{1}{k}) - (1 - \frac{1}{k+1})],$$

$$\text{即 } \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}), k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad \text{.....10 分}$$

将上述 n 个不等式依次相加得

$$\ln(n+1) < \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) + \frac{1}{2(n+1)},$$

$$\text{两边加 } \frac{1}{2}, \text{ 整理得 } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{2} + \ln(n+1) (n \geq 1) \quad \text{.....12 分}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线