河池市 2023 年春季学期高二年级期末教学质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　根据题意可得直线为 $y=3(x-1)+2$，化简得 $3x-y-1=0$，故选 A.

2. C　每人选择的方式有 2 种，总共有 $2\times2\times2=8$ 种. 故选 C.

3. D　相关系数 r 的绝对值越大，则两变量的相关性就越强，故 A 错。经验回归方程一定过样本中心点，故 B 错，根据经验回归方程可知 x 增加 1 个单位时，y 平均增加 2 个单位，故 C 错，$b=-1$，故 D 正确.

4. A　$\cos\angle AF_1F_2=\dfrac{|OF_1|}{|AF_1|}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，故选 A.

5. C　$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选 C.

6. B　$\sin\angle AF_1F_2=\dfrac{|AF_2|}{2c}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}$，$|AF_2|=\dfrac{(\sqrt{7}-1)c}{2}$，则 $|AF_1|=\dfrac{(\sqrt{7}+1)c}{2}$，$|AF_1|-|AF_2|=c=2a$. $\therefore \dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2-a^2}{a^2}}=\sqrt{3}$，$\therefore$ 渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$. 故选 B.

7. C　$E(X)=4\times\dfrac{1}{2}=2$，$E(Y)=\mu$，$E(Y)=8C_4^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=3$，得 $\mu=3$，当 $P(Y\leqslant0)=P(Y\geqslant m^2+2)$ 时，$m^2+2=6$，解得 $m=-2$ 或 2，故选 C.

8. C　$\dfrac{1}{a_n}=1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，$a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$，

令 $b_n=(\lambda n+1)(2^n-1)\cdot\dfrac{1}{2^n-1}=\lambda n+1$，$b_{n+1}-b_n=\lambda(n+1)-\lambda n-1=\lambda$，$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，前 n 项和最大值为 S_8，则 $\begin{cases}\lambda<0\\ a_8>0\\ a_9<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda<0\\ 8\lambda+1>0\\ 9\lambda+1<0\end{cases}$，解得 $\lambda\in\left(-\dfrac{1}{8},-\dfrac{1}{9}\right)$. 故选 C.

9. AC　$E(2X+1)=2E(X)+1=5$，则 $E(X)=2$，$D(3X-1)=9D(X)=9$，则 $D(X)=1$，故选 AC.

10. BC　$T_{r+1}=C_9^r x^{9-r}(-1)^r x^{-r}=(-1)^r C_9^r x^{9-2r}$.

令 $x=1$ 得 $0^9=0$，故 A 错误；$2^n=2^9=512$，故 B 正确；

当 $9-2r=0$ 时，$r=4.5$ 不符合题意，所以无常数项，故 C 正确；

在 $(-1)^r C_9^r$ 中，当 $r=4$ 时最大，故第 5 项的系数最大，故 D 错误. 故选 BC.

11. AC　$|AP|_{\max}=|AC|+1=\sqrt{5}+1$，故 A 正确；

$|OP|+|PA|\geqslant|OA|=\sqrt{10}$，故 B 错误；

设直线 AP：$y=k(x-3)+1$，根据题意可得 C 点到直线 AP 的距离 $d=\dfrac{|1-2k|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant1$，解得 $0\leqslant k\leqslant\dfrac{4}{3}$，故 C 正确；

以 AC 为直径圆的方程 $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$，则公共弦方程为 $y=-2x+3$，故 D 错误. 故选 AC.

12. ACD　$\dfrac{p}{2}=1$，则 $p=2$，故 A 正确；准线方程为 $x=-1$，故 B 错误；对于 C 选项，过 A、B 点往准线作垂线，垂足为 A_1、B_1，AB 的中点为 D 点，过 D 点作准线的垂线，垂足为 D_1，$|AB|=|AA_1|+|BB_1|=2|DD_1|$，故 C 正确；对于 D 选项，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}y=kx-k\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow k^2x^2-(4+2k^2)x+k^2=0$. $\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{-4\sqrt{x_1x_2}}{x_1x_2}=\dfrac{-4}{\sqrt{x_1x_2}}=-4$，故 D 正确.

13. $\dfrac{1}{2}$　数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $a_1+a_6+a_{11}=3a_6=6$，$a_6=2$，公差 $d=\dfrac{1}{2}(a_6-a_4)=\dfrac{1}{2}$.

14. $y=8x-14$　$f'(x)=3x^2-x-2$，$f'(2)=8$，$f(2)=2$，则切线方程为 $y=8(x-2)+2=8x-14$.

15.0.7　设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示选到 i 级队员的事件，B 表示任选一名队员通过选拔进入比赛的事件，$P(A_1)=\frac{10}{20}=0.5$，$P(A_2)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(A_3)=\frac{5}{20}=0.25$，$P(B|A_1)=0.8$，$P(B|A_2)=0.7$，$P(B|A_3)=0.5$，$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)=0.5\times0.8+0.25\times0.7+0.25\times0.5=0.7$.

16.(4,6)　$f'(x)=x-(a+2)+\frac{2a}{x}=\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x}=\frac{(x-2)(x-a)}{x}=0$ 在(4,6)上有解，经验证：当 $a\in(4,6)$ 时，$f(x)$ 在(4,6)上确实存在极值点，所以 $4<a<6$，即实数 a 的取值范围是(4,6).

17.解：(1)∵数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_2=4$，$a_5=32$，

∴$q^3=\frac{a_5}{a_2}=\frac{32}{4}=8$，$q=2$，$a_1\cdot q=2a_1=4$，∴$a_1=2$，

∴$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$，…………………………………………………… 4 分

(2)设 $b_n=na_n=n\cdot2^n$，…………………………………………………… 5 分

则 $\begin{cases}T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n & ①,\\ 2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1} & ②,\end{cases}$ …………………………… 7 分

①−②得 $-T_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，

…………………………………………………………………………… 9 分

∴$T_n=2+(n-1)\cdot2^{n+1}$. ……………………………………………… 10 分

18.解：(1)零假设为 H_0：对此公告的了解情况与性别相互独立，即对此公告的了解情况与性别无关，

由题意，$\chi^2=\frac{400\times(140\times20-180\times60)^2}{320\times80\times200\times200}=25>10.828=x_{0.001}$. ………………………… 3 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立.

即认为对此公告的了解情况与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001；…………………… 6 分

(2)由样本数据可知，“了解”的概率为 $\frac{320}{400}=\frac{4}{5}$，…………………………………………… 9 分

设这 5 名市民中恰有 3 名为“了解”为事件 A，则 $P(A)=C_5^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{128}{625}$.　……………… 12 分

19.(1)证明：连接 AC. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=120^\circ$，$AD=2$，所以 $AC=2$.

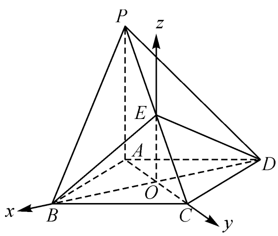
在△PAD 中，$PA=AD=2$，$PD=2\sqrt{2}$，所以 $PA^2+AD^2=PD^2$，所以 $PA\perp AD$.

在△PAC 中，$AC=2$，$PA=2$，$PC=2\sqrt{2}$，所以 $PA^2+AC^2=PC^2$，所以 $PA\perp AC$.

又 $AC\cap AD=A$，$AC,AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp$平面 $ABCD$. ……………………………… 2 分

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp BD$；……………………………………………………… 4 分

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$. 又 $AC\cap PA=A$，$AC,PA\subset$平面 PAC，所以 $BD\perp$平面 PAC. 又 $PC\subset$平面 PAC，所以 $PC\perp BD$；………… 6 分



(2)解：记 $AC\cap BD=O$，连接 OE，O 是 AC 中点，E 是 PC 中点，∴$OE\parallel PA$，由(1)知 $PA\perp$平面 $ABCD$，∴$OE\perp$平面 $ABCD$，以 O 为坐标原点，OB,OC,OE 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$P(0,-1,2)$，$A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},-1,2)$，$\overrightarrow{BA}=(-\sqrt{3},-1,0)$.

设平面 BAP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$.

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1-y_1+2z_1=0,\\ -\sqrt{3}x_1-y_1=0,\end{cases}$ 令 $y_1=-\sqrt{3}$，解得 $x_1=1$，$z_1=0$，

所以平面 BAP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$.　…………………………………………… 8 分

∵$AC\perp BD$，$PA\perp AC$，又∵$PA\parallel OE$，∴$AC\perp OE$，∴$AC\perp$平面 BDE，

∴平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{OC}=(0,1,0)$. ……………………………………… 10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即平面 PAB 与平面 BDE 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$. ……………………… 12 分

20. 解：(1)推荐的 6 名老师中任选 3 名去参加活动基本事件总数 $n=C_6^3=20$，…………………………………… 2 分

这 6 名老师中，数学老师 2 名，英语老师 2 名，化学老师 2 名，

设事件 A 表示“选出的数学老师人数多于英语老师人数”，…………………………………………………… 3 分

A_1 表示“恰好选出 1 名数学老师和 2 名化学老师”，

A_2 表示“恰好选出 2 名数学老师”，…………………………………………………………………………… 4 分

A_1,A_2 互斥，且 $A=A_1\cup A_2$，

$P(A_1)=\frac{C_2^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，

$P(A_2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，…………………………………………………………………………… 5 分

∴选出数学老师人数多于英语老师人数的概率为 $P=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$；……………… 6 分

(2)由于从 6 名老师中任选 3 名的结果为 C_6^3，………………………………………………………………… 7 分

从 6 名老师中任选 3 名，其中恰有 m 名数学老师的结果为 $C_2^mC_4^{3-m}$，$m=0,1,2$，那么 6 名中任选 3 人，……

…… 8 分

恰有 m 名数学老师的概率为 $P(X=m)=\frac{C_2^mC_4^{3-m}}{C_6^3}$，…………………………………………………… 9 分

所以 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

∴$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$ ……………………………………………………………… 11 分

$D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(2-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意可知 $|BF|=a=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；……

…… 4 分

(2)由直线 l 的方程为 $y=x-2m$，则点 $N(0,m)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{3\sqrt{2}}{2}|m|$，

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=x-2m,\end{cases}$ 整理可得 $7x^2-16mx+16m^2-12=0$，……………………………… 6 分

由判别式 $\Delta=256m^2-4\times7(16m^2-12)>0$，解得 $m\in\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{16m}{7}$，$x_1\cdot x_2=\frac{16m^2-12}{7}$，

可得 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-2m-x_2+2m)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2}\times$ $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{256m^2}{49}-\frac{4(16m^2-12)}{7}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-12m^2}$，

所以 $S_{\triangle ACN}=\frac{1}{2}|AC|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{7}\sqrt{21-12m^2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}|m|$ ……………………………………… 10 分

$=\frac{3\sqrt{3}}{7}\sqrt{(7-4m^2)\cdot4m^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{7}\times\frac{7-4m^2+4m^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$（当且仅当 $m=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}\in\left(-\frac{\sqrt{7}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ 时，等号成立），

所以所求直线的方程为 $y=x+\frac{\sqrt{14}}{2}$ 或 $y=x-\frac{\sqrt{14}}{2}$. ……………………………………………………… 12 分

22. (1)解：∵$f(x)=e^{x-1}-\ln x$，

∴$f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，……………………………………………………………………………………… 2 分

设 $\mu(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$\mu'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

$\therefore\mu(x)$在$(0,+\infty)$上为单调递增函数，…………………………………………………………………… 3 分

$\mu(1)=0$，$\therefore f'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，………………………………………………………… 4 分

当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$\therefore x=1$ 时，$f(x)$取得最小值，$f(x)_{\min}=f(1)=1$；………………… 5 分

(2)证明：$exf(x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$，只需证 $ex(e^{x-1}-\ln x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$，

即$(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$，令 $g(x)=(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}$，则 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}(x>0)$，…………… 6 分

当 $x>0$ 时，令 $h(x)=g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}$，则 $h'(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

即 $g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上为增函数，………………………………………………………………… 7 分

又因为 $g'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}=\frac{2}{3}\left[e^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]<0$，$g'(1)=e-1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{2}{3},1\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，……………………………………………………………… 8 分

由 $g'(x_0)=x_0e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0^2e^{x_0}-1}{x_0}=0$，

得 $x_0^2e^{x_0}=1$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$，即$-2\ln x_0=x_0$，……………………………………………………… 9 分

所以当 $x\in(0,x_0)$时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}<0$，$g(x)$单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)=xe^x-\frac{1}{x}>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-\ln x_0+\frac{1}{2}=\frac{x_0-1}{x_0^2}+\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x_0^3+x_0^2+2x_0-2}{2x_0^2}$，……………… 10 分

令 $\varphi(x)=x^3+x^2+2x-2\left(\frac{2}{3}<x<1\right)$，

则 $\varphi'(x)=3x^2+2x+2=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0$，

所以 $\varphi(x)$在$\left(\frac{2}{3},1\right)$上单调递增，所以 $\varphi(x_0)>\varphi\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}>0$，…………………………………… 11 分

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=\frac{\varphi(x_0)}{2x_0^2}>0$，所以$(x-1)e^x-\ln x+\frac{1}{2}>0$，

即 $exf(x)+(ex-1)\ln x-e^x+\frac{1}{2}>0$.. ………………………………………………………………………… 12 分