高三练习卷

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid \ln x<0\}$，$B=\{x\mid 2^x<\sqrt{2}\}$，则 $A\cap B=$

A．$(-\infty,1)$　　B．$(0,1)$　　C．$(-\infty,\frac{1}{2})$　　D．$(0,\frac{1}{2})$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0,\\ -\sin x, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(-\frac{\pi}{6}))=$

A．$\sqrt{2}$　　B．1　　C．-1　　D．2

3. 若 $\frac{z-3}{z+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，复数 z 与 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点分别为 A，B，则 $|AB|=$

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．4

4. 现有茶壶九只，容积从小到大成等差数列，最小的三只茶壶容积之和为0.5 升，最大的三只茶壶容积之和为2.5 升，则从小到大第 5 只茶壶的容积为

A．0.25 升　　B．0.5 升　　C．1升　　D．1.5 升

5. 古希腊人从一对对顶圆锥的截痕中发现了圆锥曲线，并研究了它的一些几何性质．比如，双曲线有如下性质：A,B 分别为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，从 C 上一点 P（异于 A,B）向实轴引垂线，垂足为 Q，则 $\frac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|QB|}$ 为常数．若 C 的离心率为 2，则该常数为

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．3

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4,AD=2$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=9$，则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=$

A．-1　　B．1　　C．$\frac{15}{8}$　　D．3

7. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=3$，M 是 A_1D_1 的中点，点 N 在棱 CC_1 上，$CN=2NC_1$，则平面 AMN 与侧面 BB_1C_1C 的交线长为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$

8. 已知 $f(x)=\left|\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\right|$，若 $a=f(\ln\frac{2}{3}),b=f(\frac{1}{3}),c=f(\tan\frac{1}{2})$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某学校高三年级有男生 640 人，女生 360 人．为获取该校高三学生的身高信息，采用抽样调查的方法统计样本的指标值（单位：cm），并计算得到男生样本的平均值 175，方差为 36，女生样本的平均值为 165，方差为 36，则下列说法正确的是

A. 若男、女样本量分别为 64，36，则总样本的平均值为 171.4

B. 若男、女样本量分别为 64，36，则总样本的方差为 36

C. 若男、女的样本量都是 50，则总样本的平均值为 170

D. 若男、女的样本量都是 50，则总样本的方差为 61

10. 已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(2,0)$ 作斜率为 $\sqrt{3}$ 的弦 AB，其中点 A 在第一象限，则

A. $\angle AOF=\angle BOF$　　B. $\angle AOB>90°$

C. $|AB|=\dfrac{16}{3}$　　D. $|AF|=3|FB|$

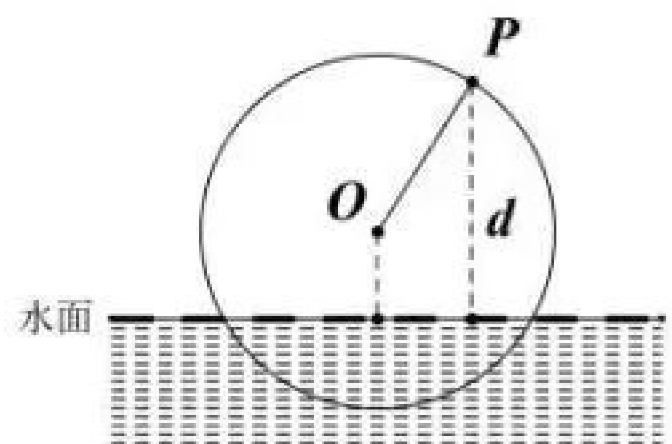
11. 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理．如图，一个半径为 4 m 的筒车按逆时针方向每分钟转 2 圈，筒车的轴心 O 距离水面的高度为 2 m．设筒车上的某个盛水桶 P 到水面的距离为 d（单位：m）（在水面下记 d 为负数），若从盛水筒 P 刚浮出水面时开始计算时间，则

A. 当筒车转动 5 秒时，盛水桶距离水面 4 m

B. 盛水桶出水后至少经过 10 秒就可到达最高点

C. 盛水桶第二次距离水面 4m 时用时 15 秒

D. 盛水桶入水后至少需要 20 秒才可浮出水面



12. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成空间四边形 $A'BCD$，使得 $\angle A'BC=\frac{\pi}{2}$．设 E，F 分别为棱 BC，$A'D$ 的中点，则

A．$EF=\sqrt{3}$

B．直线 $A'C$ 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．直线 $A'C$ 与 EF 的距离为 $\frac{1}{2}$

D．四面体 $A'BCD$ 的外接球的表面积为 4π

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^4(3x-2)$ 的展开式中含 x^3 项的系数为________．

14. 已知圆 $C_1:(x-a)^2+(y-1)^2=1$ 与圆 $C_2:x^2+y^2=3$ 交于 A，B 两点，若直线 AB 的倾斜角为 60°，则 $|AB|=$________．

15. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\sin\alpha$，$\sin\theta\cos\theta=-\sin 2\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha=$________．

16. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 是偶函数，$g(x-1)+1$ 是奇函数，且 $g(x-2)=f(x)+4$，$f(4)=-3$，则 $g(-1)=$________；$\sum\limits_{k=1}^{2023}g(k)=$________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，点 D 在线段 AC 上，$BD=CD=2AD$．

（1）若 $a=c=2$，求 b；

（2）若 $B=\frac{\pi}{3}$，求角 A．

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 3 的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且满足 $a_1+a_3=b_1+b_2+b_3$，$a_2+a_4=b_2+b_4$．将数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的公共项按照由小到大的顺序排列，构成新数列 $\{c_n\}$．

（1）证明：$c_n=b_{2n}$；

（2）求数列 $\{a_nc_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

19.（12 分）

某微型电子集成系统可安装 3 个或 5 个元件，每个元件正常工作的概率均为 $p(0<p<1)$，且各元件是否正常工作相互独立．若有超过一半的元件正常工作，则该系统能稳定工作．

（1）若该系统安装了 3 个元件，且 $p=\dfrac{2}{3}$，求它稳定工作的概率；

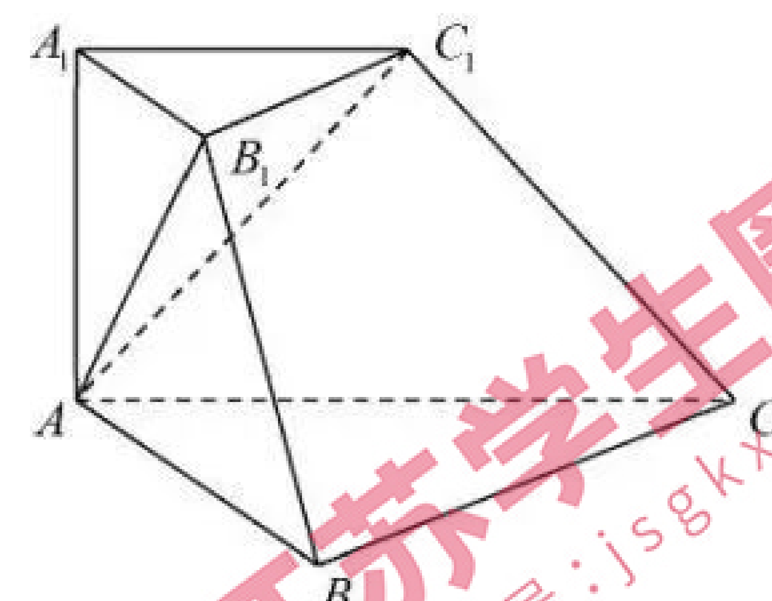
（2）试比较安装了 5 个元件的系统与安装了 3 个元件的系统哪个更稳定．

20.（12 分）

如图，在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=2A_1C_1$，四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

（1）求三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的体积；

（2）若 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，平面 $A_1ACC_1\perp$ 平面 ABC，平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC，求二面角 $A-B_1C_1-B$ 的正弦值．



21.（12 分）

已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左、右顶点是双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的顶点，C_1 的焦点到 C_2 的渐近线的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．直线 $l:y=kx+t$ 与 C_2 相交于 A,B 两点，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$．

（1）求证：$8k^2+t^2=1$；

（2）若直线 l 与 C_1 相交于 P,Q 两点，求 $|PQ|$ 的取值范围．

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax+a^2$，$g(x)=2e^{x-1}-ax$．

（1）若 $a=1$，证明：曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有且仅有一条公切线；

（2）当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)-g(x)\leqslant 2ax$，求 a 的取值范围．