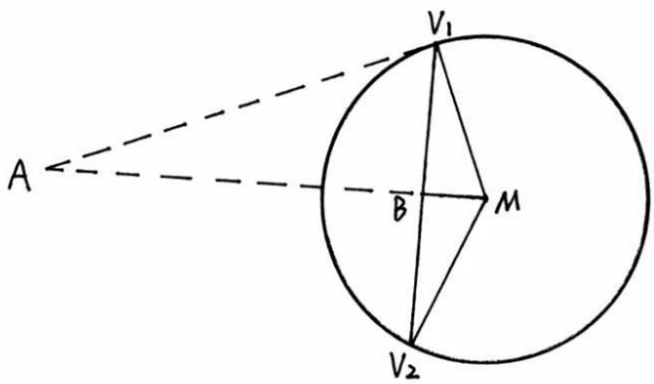
2020年德国数学奥林匹克

第一天

1. 设M是圆Ω的圆心，B是圆内的一点. 求所有圆Ω上的点V，使得$\angle BVM$取到最大值.



解：设V是圆Ω上的一点，在MB的延长线上取点A，使得$MB\cdot MA=MV^2$.

则点A在圆Ω的外部，$\triangle BVM\sim\triangle VAM$.

从而$\angle BVM=\angle VAM$.

故需求所有圆Ω上的点V，使得$\angle VAM$取到最大值.

当AV与圆Ω相切时，$\angle VAM$取到最大值. 此时$\angle VBM=\angle AVM=90^\circ$.

因此，所求所求的点V有2个，满足$BV\perp BM$.

2. 在一个原始部落中有若干个家族，某些两家族之间有一些矛盾，以至于存在矛盾的两个家族的酋长见面都不会握手。在一次酋长的年度会议上，所有家族的酋长都参加。他们发现不能排出由四个人或四个以上的人组成的圈，使得圈中每一个人都可以和自己左右两个人握手。为了强调局势的严重性，德鲁伊从每个家族收取3枚金币，然后，若两个家族的酋长能握手，德鲁伊就给这两个家族各一枚金币。试证：德鲁伊收取的金币数量至少比他发出去的金币数量多3枚。

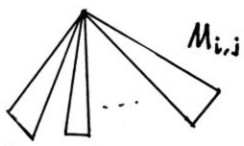
证明：设这个部落有n个家族，用点表示家族，对这些点进行连线，两点相连当且仅当它们对应的两个家族之间没有矛盾。这样得到一个简单图G。由题意知，图G中不存在长度至少为4的圈。

易知，含有n个顶点的图G，若连有n条边，则图G中含有圈。即任何边数不小于顶点数的图G一定含有圈。

若图G中没有三角形，则图G中不含圈，图G中至多有$n-1$条边。①

若图G中有三角形，由图G中不存在长度至少为4的圈，可知图G中的三角形两两无公共边，但可能有些三角形共顶点。

设图G中有k个三角形，恰有i个三角形共顶点的三角形组有m_i个，分别记为$M_{i,1}$，$M_{i,2}$，$\cdots$，M_{i,m_i} $(i=1,2,\cdots,k)$。



(i个三角形共顶点)

则$k=\sum_{i=1}^{k} i m_i$.

任意两个不同的M_{i_1,j_1}和M_{i_2,j_2}（$1\leqslant i_1,i_2\leqslant k$，$1\leqslant j_1\leqslant m_{i_1}$，$1\leqslant j_2\leqslant m_{i_2}$）之间至多有一条边。对于另外的$n-\sum\limits_{i=1}^{k}(2i+1)m_i$个点（这些点不含三角形的顶点），每个点与$M_{i,j}$至多有一条边。

现在用点$X_{i,j}$（$1\leqslant i\leqslant k$，$1\leqslant j\leqslant m_i$）表示$M_{i,j}$。点$X_{i_1,j_1}$和$X_{i_2,j_2}$相连，当且仅当$M_{i_1,j_1}$和$M_{i_2,j_2}$之间有边。

由图G中不存在长度至少为4的圈可知：

点集$\{X_{i,j}\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant m_i\}$和另外的$n-\sum\limits_{i=1}^{k}(2i+1)m_i$个点（这些点不含三角形的顶点）及边构成的图$G'$中不含圈。

因此，图G'中的边数$\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}m_i+n-\sum\limits_{i=1}^{k}(2i+1)m_i-1$

$$=n-1-\sum_{i=1}^{k}2im_i.$$

故图G中的边数$\leqslant 3k+n-1-\sum\limits_{i=1}^{k}2im_i$

$$=3\sum_{i=1}^{k}im_i+n-1-\sum_{i=1}^{k}2im_i$$

$$=n-1+\sum_{i=1}^{k}im_i$$

又由$\sum\limits_{i=1}^{k}(2i+1)m_i\leqslant n$可得$\sum\limits_{i=1}^{k}im_i\leqslant\frac{1}{2}\left(n-\sum\limits_{i=1}^{k}m_i\right)\leqslant\frac{n-1}{2}$.

从而图G中的边数$\leqslant n-1+\frac{n-1}{2}=\frac{3(n-1)}{2}$. ②

结合①、②可知图G中的边数$\leqslant\frac{3(n-1)}{2}$.

故德鲁伊发出去的金币数量$\leqslant 2\times\frac{3(n-1)}{2}=3(n-1)$.

而德鲁伊收取的金币数量是$3n$，所以德鲁伊收取的金币数量至少比他发出去的金币数量多3枚。

3. 求证：方程 $x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)-1=0$ 有且仅有一个正实数根 x_0，并且这个实根满足 $\frac{1}{2020!+10}<x_0<\frac{1}{2020!+6}$.

证明：设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2020)-1$.

易知当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增.

因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=2021!-1>0$，所以 $f(x)=0$ 有且仅有一个正实数根 x_0.

下面先证明两个引理：

引理一：$6+\frac{36}{2020!}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2020}<10$.

证明：
$$\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}>1+\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{1}{2^i+1}+\frac{1}{2^i+2}+\cdots+\frac{1}{2^{i+1}}\right)+\frac{1}{2020}$$
$$>1+\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{i+1}}\right)+\frac{36}{2020!}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{9}\frac{2^i}{2^{i+1}}+\frac{36}{2020!}$$
$$=6+\frac{36}{2020!}.$$

$$\sum_{k=1}^{2020}\frac{1}{k}<\sum_{k=1}^{2047}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{i=2}^{10}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^i+1}+\cdots+\frac{1}{3\times2^{i-1}-1}\right)+\sum_{i=2}^{10}\left(\frac{1}{3\times2^{i-1}}+\frac{1}{3\times2^{i-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{i+1}-1}\right)$$
$$<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{i=2}^{10}\frac{2^{i-1}}{2^i}+\sum_{i=2}^{10}\frac{2^{i-1}}{3\times2^{i-1}}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{3}$$
$$<10.$$

引理二：设$n\geq 2$是正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,1)$，且$x_1+x_2+\cdots+x_n<1$. 则$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)>1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.　(*)

用数学归纳法证明(*)式成立.

当$n=2$时，$(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2>1-(x_1+x_2)$.

假设对于$n=k$时，(*)式成立.

则对于$n=k+1$时，有$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_k)(1-x_{k+1})$

$$>[1-(x_1+x_2+\cdots+x_k)](1-x_{k+1})$$

$$>1-(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}).$$

故对任意的正整数$n\geq 2$，(*)式成立.

接着分两步证明$\frac{1}{2020!+10}<x_0<\frac{1}{2020!+6}$

(1) $x_0>\frac{1}{2020!+10}$

要证$x_0>\frac{1}{2020!+10}$，只需证$f(x_0)>f(\frac{1}{2020!+10})$，即$f(\frac{1}{2020!+10})<0$.

记$a=2020!+10$.

$$f(\tfrac{1}{a})<0\iff(\tfrac{1}{a}+1)(\tfrac{1}{a}+2)\cdots(\tfrac{1}{a}+2020)<a$$

$$\iff\frac{a}{1+a}\cdot\frac{a}{1+2a}\cdot\cdots\cdot\frac{a}{1+2020a}>\frac{1}{a}$$

$$\iff\frac{a}{1+a}\cdot\frac{2a}{1+2a}\cdot\cdots\cdot\frac{2020a}{1+2020a}>\frac{2020!}{a}$$

$$\iff(1-\frac{1}{1+a})(1-\frac{1}{1+2a})\cdots(1-\frac{1}{1+2020a})>1-\frac{10}{a}.\ ①$$

由引理二和引理一可得$(1-\frac{1}{1+a})(1-\frac{1}{1+2a})\cdots(1-\frac{1}{1+2020a})$
$>1-(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+2a}+\cdots+\frac{1}{1+2020a})>1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\cdots+\frac{1}{2020a})$
$=1-\frac{1}{a}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2020})>1-\frac{10}{a}$. 故①式成立.

从而$x_0>\frac{1}{2020!+10}$.

(2) $x_0<\frac{1}{2020!+6}$

要证 $x_0<\frac{1}{2020!+6}$，只需证 $f(x_0)<f(\frac{1}{2020!+6})$，即 $f(\frac{1}{2020!+6})>0$.

记 $b=\frac{1}{2020!+6}$，利用引理一可得：

$(b+1)(b+2)\cdots(b+2020)>2020!+2020!(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2020})b$

$>2020!+2020!\cdot(6+\frac{36}{2020!})\cdot\frac{1}{2020!+6}=2020!+6.$

即 $f(\frac{1}{2020!+6})>0$. 从而 $x_0<\frac{1}{2020!+6}$.

第二天

4. 求所有正整数 n，使得存在一个正整数 d，满足 $d|n$ 且 $(d^2n+1)|(n^2+d^2)$.

解：若存在正整数 d，满足 $d|n$ 且 $(d^2n+1)|(n^2+d^2)$.

设 $n=dk$，其中 k 是一个正整数.

由 $(d^3k+1)|(d^2k^2+d^2)$，d^3k+1 和 d 互素，可得 $(d^3k+1)|(k^2+1)$.

从而 $d^3k+1\leqslant k^2+1$，即 $k\geqslant d^3$. ①

又由 $d^6+1=d^6(k^2+1)-(d^6k^2-1)=d^6(k^2+1)-(d^3k+1)(d^3k-1)$，

可得 $(d^3k+1)|(d^6+1)$. 从而 $d^3k+1\leqslant d^6+1$，即 $k\leqslant d^3$. ②

结合①，②可得 $k=d^3$. 故 $n=d^4$.

综上所述，所求 $n=m^4$ $(m\in Z^+)$.

5. 设正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{22}$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_{22}=59$. 求证：$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_{22}}{a_{22}+1}<16$.

证明：原不等式 $\Leftrightarrow \frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{22}+1}>6$. (*)

设 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{22})=\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{22}+1}$.

若 $a_1, a_2, \cdots, a_{22}$ 中存在两个数 a_i, a_j, 使得 $a_i-a_j \geqslant 2$. 令 $a_i'=a_i-1$, $a_j'=a_j+1$, $a_k'=a_k$ $(1 \leqslant k \leqslant 22, k \neq i, j)$. 则 $a_1', a_2', \cdots, a_{22}'$ 是正整数, 且 $a_1'+a_2'+\cdots+a_{22}'=a_1+a_2+\cdots+a_{22}=59$.

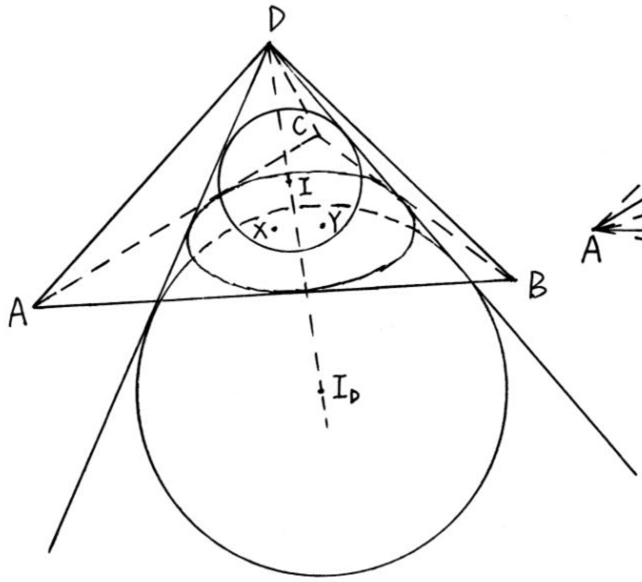
$$f(a_1, a_2, \cdots, a_{22})-f(a_1', a_2', \cdots, a_{22}')$$
$$=\frac{1}{a_i+1}+\frac{1}{a_j+1}-\frac{1}{a_i'+1}-\frac{1}{a_j'+1}$$
$$=\frac{1}{a_i+1}+\frac{1}{a_j+1}-\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j+2}$$
$$=(a_i+a_j+2)\left[\frac{1}{(a_i+1)(a_j+1)}-\frac{1}{a_i(a_j+2)}\right]$$
$$=\frac{(a_i+a_j+2)(a_i-a_j-1)}{a_i(a_i+1)(a_j+1)(a_j+2)}>0.$$

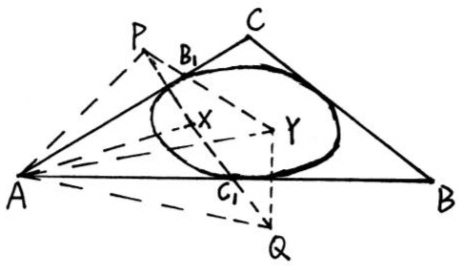
即 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{22})>f(a_1', a_2', \cdots, a_{22}')$.

因此, 当 f 达到最小值时, 对任意 $1 \leqslant i, j \leqslant 22$, 有 $|a_i-a_j| \leqslant 1$. 而 $59=7\times2+15\times3$, 所以当 $a_1, a_2, \cdots, a_{22}$ 中有7个2, 15个3时, f 最小, 此时 $f=7\times\frac{1}{3}+15\times\frac{1}{4}=6+\frac{1}{12}>6$.

故(*)式成立.

6. 已知四面体ABCD的内切球和D-旁切球分别与平面ABC切于点X、Y. 求证：$\angle XAB=\angle CAY$.





证明：设四面体ABCD的内切球球心为I，D-旁切球球心为I_D，则D、I、I_D三点共线.

以D为顶点作一个圆锥，该圆锥与四面体ABCD的内切球和D-旁切球相切. 则平面ABC与该圆锥面的截面是一个椭圆，且点X、Y是这个椭圆的两个焦点.

这个椭圆与$\triangle ABC$的各边相切，设与AC、AB分别切于B_1、C_1.

设点X关于AC的对称点为P，点Y关于AB的对称点为Q.

由椭圆的光学性质可知：X，C_1，Q三点共线；Y，B_1，P三点共线.

$\because PY=PB_1+B_1Y=B_1X+B_1Y=C_1X+C_1Y=C_1X+C_1Q=XQ$，

$AP=AX$，$AY=AQ$. $\therefore \triangle APY\cong\triangle AXQ$. $\Rightarrow\angle PAY=\angle XAQ$.

$\Rightarrow PAX=\angle YAQ\ \Rightarrow\angle XAC=\angle YAB\ \Rightarrow\angle XAB=\angle YAC$.

注：实际上，点X、Y是$\triangle ABC$的一对等角共轭点.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》