高三数学试题参考答案

1. C　由题意可得 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，则 $A\cap B=\{-4,-3,-1,3,4\}$.

2. A　由题意可得 $z=(1+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}+\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-2+4\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$.

3. B　设抛物线 $C:x^2=-2py(p>0)$，由题意可知点 $(4,-4)$ 在抛物线 C 上，则 $-2p\times(-4)=4^2$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的焦点到准线的距离是 2 米.

4. C　由题意可得 $f'(x)=3x^2-\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=2,f(1)=3$，则所求切线方程为 $y-3=2(x-1)$，即 $y=2x+1$.

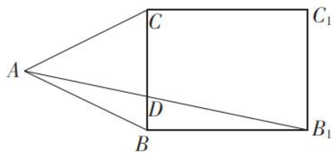
5. D　当 $a_1<0$ 时，由 $q>1$，得 $\{a_n\}$ 为递减数列，则“$q>1$”不是“$\{a_n\}$为递增数列”的充分条件. 若 $a_n=-\frac{1}{2^n}$，满足 $\{a_n\}$ 为递增数列，此时 $q=\frac{1}{2}<1$，则“$q>1$”不是“$\{a_n\}$为递增数列”的必要条件. 故“$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的既不充分也不必要条件.

6. B　设 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\alpha=\beta-\frac{\pi}{3}$，

故 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin[2(\beta-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sin(2\beta-\frac{\pi}{2})=-\cos 2\beta=-(1-2\sin^2\beta)=-\frac{5}{6}$.

7. C　由题意可得 $a=\log_3 2=\frac{\lg 2}{\lg 3}$，$b=\log_5 2=\frac{\lg 2}{\lg 5}=\frac{\lg 2}{1-\lg 2}$，则 $\lg 2=\frac{b}{b+1}$，$\lg 3=\frac{b}{a(b+1)}$，故 $\lg 6=\lg 2+\lg 3=\frac{b(a+1)}{a(b+1)}$.

8. A　如图，将△ABC 与矩形 BB_1C_1C 展开至同一平面，易知 $\angle ABB_1=150°$. 设 $BB_1=x$，由题意知 $AD+DB_1$ 的最小值为 AB_1，即 $AB_1=\sqrt{13}$. 由余弦定理可得 $AB_1^2=AB^2+BB_1^2-2AB\cdot BB_1\cos\angle ABB_1$，即 $x^2+3x-10=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-5$(舍去). 设△ABC 的外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{AB}{\sin 60°}=2$，即 $r=1$. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径为 R，则 $R^2=r^2+(\frac{AA_1}{2})^2=2$，故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$.



9. BC　由图可知高三年级学生人数占总人数的 40%，抽取的样本中高三年级学生有 32 人，则抽取的学生总人数为 $\frac{32}{40\%}=80$，则样本中高一学生人数为 $80\times(1-40\%-35\%)=20$，样本中高二学生人数为 $80\times35\%=28$，从而样本中高三学生人数比高一学生人数多 $32-20=12$. 因为从该校所有学生中抽取的学生总人数是 80，但抽取的比例不知道，所以该校高一学生人数和该校学生总人数求不出来，故选 BC.

10. ACD　由题意可得直线 l 过定点 $A(1,1)$，圆 C 的圆心坐标为 $C(2,2)$，半径为 2，则 A 正确，B 错误. 因为点 $A(1,1)$ 在圆 C 的内部，所以直线 l 与圆 C 一定相交，则 C 正确. 因为 $|AC|=$

$\sqrt{2}$，所以圆 C 的圆心到直线 l 的距离的最大值是 $\sqrt{2}$，则 D 正确.

11. AD　令 $x=y=1$，得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$，则 A 正确. 由题意可知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，则 $f(x)$ 是非奇非偶函数，故 B 错误. 当 $x>1$ 时，因为 $y>0$，所以 $xy>y$. 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 错误. 令 $x=y=2$，得 $f(4)=2f(2)$. 因为 $f(4)=12$，所以 $f(2)=6$. 因为 $f(xy)=f(x)+f(y)$，所以 $f(xy)-f(y)=f(x)$，所以 $f(x+3)-f(\frac{2}{x})=f(\frac{x^2+3x}{2})$，所以 $f(x+3)-f(\frac{2}{x})<6$ 等价于 $f(\frac{x^2+3x}{2})<f(2)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}x+3>0,\\ \frac{2}{x}>0,\\ \frac{x^2+3x}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $0<x<1$，则 D 正确.

12. BD　对于 A，依次发送红色、黄色、青色信号，则依次显示青色、青色、红色的事件是发送红色信号显示青色、发送黄色信号显示青色、发送青色信号显示红色的 3 个事件的积，它们相互独立，所以所求概率为 $(1-\alpha)\beta\gamma$，A 错误；对于 B，两次传输，发送红色信号，相当于依次发送红色、红色信号，则依次显示黄色、黄色的事件是发送红色信号接收黄色信号、发送红色信号接收黄色信号的 2 个事件的积，它们相互独立，所以所求概率为 α^2，B 正确；对于 C，两次传输，发送红色信号，则译码为红色的事件是依次显示黄色、青色或青色、黄色的事件的和，它们互斥，所以所求的概率为 $C_2^1\alpha(1-\alpha)=2\alpha(1-\alpha)$，故 C 错误；对于 D，若采用两次传输，发送红色信号，则译码为青色的概率 $P=(1-\alpha)^2$，若单次传输发送红色信号，则译码为青色的概率 $P'=1-\alpha$，因此 $P-P'=(1-\alpha)^2-(1-\alpha)=-\alpha(1-\alpha)<0$，即 $P<P'$，D 正确.

13. ±1　由题意可得 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-2,2k+1)$，则 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5k^2+5}=\sqrt{10}$，解得 $k=\pm1$.

14. $4\sin(2x+\frac{\pi}{6})$（答案不唯一）　因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $f(x)$ 的解析式可以为 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$ 或 $f(x)=A\cos(2x+\varphi)$ 等. 因为 $f(x)$ 的最大值是 4，对于函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，所以只要 $A=4$ 就可以满足. 因为 $f(0)=2$，对于函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，所以只要 $\varphi=\frac{\pi}{6}$ 就可以满足.

15. 264　由题意可得该圆台的高为 4 米，则该圆台的体积为 $\frac{1}{3}\times(9\pi+36\pi+\sqrt{9\pi\times36\pi})\times4=84\pi\approx264$ 立方米.

16. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　由题意可知 $\angle MF_2F_1=90°$，则 $|MF_2|=\frac{b^2}{a}$，$|MF_1|=\frac{b^2}{a}+2a=\frac{a^2+c^2}{a}$. 因为 $2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NF_1}$，所以 $|NF_1|=\frac{2}{5}|MF_1|=\frac{2(a^2+c^2)}{5a}$. 由题意可得 $\triangle ONF_1\backsim\triangle MF_2F_1$，所以 $\frac{NF_1}{F_1F_2}=\frac{OF_1}{MF_1}$，即 $\frac{a^2+c^2}{5ac}=\frac{ac}{a^2+c^2}$，即 $a^2+c^2=\sqrt{5}ac$，则 $e^2-\sqrt{5}e+1=0$，解得 $e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $e=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(舍去).

17. 解:(1)由题意可得$\begin{cases}a_5=a_1+4d=3,\\S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=35,\end{cases}$解得 $a_1=11,d=-2$. ………………………… 3 分

故 $a_n=a_1+(n-1)d=13-2n$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)当 $n\leqslant6$ 时,$T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{(11+13-2n)n}{2}$

$=12n-n^2$; ……………………………………………………………………………… 7 分

当 $n\geqslant7$ 时,$T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_n|=a_1+a_2+\cdots+a_6-(a_7+a_8+\cdots+a_n)=S_6$

$-(S_n-S_6)=2S_6-S_n=n^2-12n+72$. …………………………………………………… 9 分

综上,$S_n=\begin{cases}12n-n^2,n\leqslant6,\\n^2-12n+72,n\geqslant7.\end{cases}$ ……………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$,

则 $BC^2=16+8-2\times4\times2\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=40$,故 $BC=2\sqrt{10}$. ……………………………… 3 分

由正弦定理可得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$,则 $\sin\angle ABC=\frac{AC\cdot\sin\angle BAC}{BC}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. …… 6 分

(2)因为$\angle BAC=135^\circ$,所以 $0^\circ<\angle ABC<90^\circ$,所以 $\cos\angle ABC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. …………… 7 分

因为 $AD\perp AB$,所以 $\cos\angle ABC=\frac{AB}{BD}$,所以 $BD=\frac{AB}{\cos\angle ABC}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$, ……………… 9 分

则 $CD=BC-BD=\frac{2\sqrt{10}}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

设点 A 到直线 BC 的距离为 d,

因为 $S_1=\frac{1}{2}BD\cdot d,S_2=\frac{1}{2}CD\cdot d$,所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{BD}{CD}=2$. ……………………………… 12 分

19. 解:(1)从参与调查的居民中随机抽取 2 人,共有 C_{200}^2 种不同抽法, ……………………… 1 分

其中符合条件的不同抽法有 C_{25}^2 种, ……………………………………………………… 2 分

则所求概率 $P=\frac{C_{25}^2}{C_{200}^2}=\frac{25\times12}{100\times199}=\frac{3}{199}$. …………………………………………………… 4 分

(2)从该地居民中随机抽取 1 人,则这人获得 100 元电子消费金的概率是$\frac{1}{8}$,获得 50 元电子消费金的概率是$\frac{5}{8}$,没有获得电子消费金的概率是$\frac{1}{4}$. ………………………………… 6 分

由题意可知 X 的所有可能取值为 0,50,100,150,200.

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$,$P(X=50)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$,

$P(X=100)=C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{29}{64}$,$P(X=150)=C_2^1\times\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{32}$,

$P(X=200)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$，

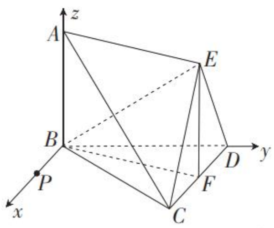
则 X 的分布列为

X	0	50	100	150	200
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{64}$

………………………………………………………………………………… 10 分

故 $E(X)=0\times\frac{1}{16}+50\times\frac{5}{16}+100\times\frac{29}{64}+150\times\frac{5}{32}+200\times\frac{1}{64}=\frac{175}{2}$. …………………… 12 分

20.（1）证明：取 CD 的中点 F，连接 EF，BF.



因为△ECD 是边长为 2 的正三角形，所以 $EF\perp CD$，且 $EF=\sqrt{3}$.

……………………………………………………………… 1 分

因为平面 $ECD\perp$ 平面 BCD，且平面 $ECD\cap$ 平面 $BCD=CD$，$EF\subset$ 平面 ECD，所以 $EF\perp$ 平面 BCD. ……………………………… 2 分

因为 $AB\perp$ 平面 BCD，所以 $AB/\!/EF$. ………………………………………………………… 3 分

因为 $AB=EF=\sqrt{3}$，所以四边形 $ABFE$ 为平行四边形，所以 $AE/\!/BF$. ……………… 4 分

因为 $AE\not\subset$ 平面 BCD，$BF\subset$ 平面 BCD，所以 $AE/\!/$ 平面 BCD. ………………………… 5 分

（2）解：过点 B 作 $BP/\!/CD$，以 B 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BA}$ 的方向为 x，y，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(1,2,\sqrt{3})$，

故 $\overrightarrow{AC}=(2,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CE}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(1,2,\sqrt{3})$. ……………… 6 分

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x_1+2y_1-\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=2\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$. ……………… 8 分

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=2y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=x_2+2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-1)$. ……………………… 10 分

设平面 ACE 与平面 BDE 的夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{6-2}{2\sqrt{12+3+4}}=\frac{2}{\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$. …………………… 12 分

21.（1）证明：设 $M(x_1,y_1)$，

因为 M，N 关于坐标原点 O 对称，所以 $N(-x_1,-y_1)$，

则 $k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2}$，$k_2=\frac{-y_1-1}{-x_1-2}$，故 $k_1k_2=\frac{y_1^2-1}{x_1^2-4}$. ………………………………………… 2 分

因为 M 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1$，所以 $x_1^2=8-4y_1^2$，

则 $k_1k_2=\frac{y_1^2-1}{x_1^2-4}=\frac{y_1^2-1}{4-4y_1^2}=-\frac{1}{4}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)解:由题意可知直线 AM 的方程为 $y-1=k_1(x-2)$,

联立 $\begin{cases}y-1=k_1(x-2),\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得 $(4k_1^2+1)x^2-(16k_1^2-8k_1)x+16k_1^2-16k_1-4=0$,

$\Delta=(16k_1^2-8k_1)^2-4(4k_1^2+1)(16k_1^2-16k_1-4)=16(2k_1+1)^2>0$, …………………… 5 分

则 $x_1+2=\frac{16k_1^2-8k_1}{4k_1^2+1}=4-\frac{8k_1+4}{4k_1^2+1}$,从而 $x_1=2-\frac{8k_1+4}{4k_1^2+1}$,

故 $y_1=k_1(x_1-2)+1=1-\frac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1}$,即 $M(2-\frac{8k_1+4}{4k_1^2+1},1-\frac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1})$. ……………… 7 分

因为 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$,所以 $k_2=-\frac{1}{4k_1}$,

所以直线 AN 的方程为 $y-1=k_2(x-2)=-\frac{1}{4k_1}(x-2)$,即 $x+4k_1y-4k_1-2=0$, … 8 分

则 M 到直线 AN 的距离 $d=\frac{|2-\frac{8k_1+4}{4k_1^2+1}+4k_1(1-\frac{8k_1^2+4k_1}{4k_1^2+1})-4k_1-2|}{\sqrt{16k_1^2+1}}=\frac{|8k_1+4|}{\sqrt{16k_1^2+1}}$.

因为点 M 到直线 AN 的距离为 2,所以 $\frac{|8k_1+4|}{\sqrt{16k_1^2+1}}=2$,解得 $k_1=-\frac{3}{16}$, ……………… 10 分

则直线 AM 的方程为 $y-1=-\frac{3}{16}(x-2)$,即 $y=-\frac{3}{16}x+\frac{11}{8}$. ………………………… 12 分

22.(1)解:由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{a(x^2+x+1)e^x}{(x+1)^2}$.
……………………………………………………………………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上恒成立,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$,$(-1,+\infty)$ 上单调递增; ……………………………………………… 3 分

当 $a<0$ 时,$f'(x)<0$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 上恒成立,

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$,$(-1,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………… 5 分

(2)证明:因为 $x>0$,所以 $\frac{xe^x}{x+1}>0$.

因为 $a\geq\frac{4}{e^2}$,所以 $\frac{axe^x}{x+1}-(x+1)\ln x\geq\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x$. ………………………… 6 分

要证 $f(x)-(x+1)\ln x>0$,即证 $\frac{axe^x}{x+1}-(x+1)\ln x>0$,

即证 $\frac{4xe^{x-2}}{x+1}-(x+1)\ln x>0$,即证 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$. ………………………………………… 7 分

设 $g(x)=\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}$,则 $g'(x)=\frac{4e^{x-2}(x-1)}{(x+1)^3}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$g'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(x)_{\min}=g(1)=\frac{1}{e}$. ………………………………………………………… 9 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，

则 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

故 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$. ………………………………………………………… 11 分

因为 $g(x)_{\min}=h(x)_{\max}$，且两个最值的取等条件不同，所以 $\frac{4e^{x-2}}{(x+1)^2}>\frac{\ln x}{x}$，

即当 $a\geqslant\frac{4}{e^2}$ 时，$f(x)-(x+1)\ln x>0$. ……………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。