

2023 年邵阳市高三第二次联考试题卷

数 学

本试卷共 6 页,22 个小题。满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴区”。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 保持答题卡的整洁。考试结束后,只交答题卡,试题卷自行保存。

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 在复平面内,复数 $\frac{3-i}{-1+i}$ (i 为虚数单位)对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = [-2, 5]$, $B = [m+1, 2m-1]$. 若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的充分不必要条件,则 m 的取值范围是
A. $(-\infty, 3]$ B. $(2, 3]$ C. \emptyset D. $[2, 3]$
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$, $\mathbf{c} = (4, 5)$. 若 \mathbf{a} 与 $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$ 垂直,则实数 λ 的值为
A. $\frac{2}{19}$ B. $\frac{4}{11}$ C. 2 D. $-\frac{4}{7}$
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_5 x|, & 0 < x < 5, \\ -\cos(\frac{\pi}{5}x), & 5 \leq x \leq 15. \end{cases}$ 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$), 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $x_1 x_2 x_3 x_4$ 的取值范围是
A. $(0, \frac{375}{4})$ B. $(0, 100)$ C. $(75, \frac{375}{4})$ D. $(75, 100)$

2023 年邵阳市高三第二次联考试题卷(数学) 第 1 页(共 6 页)

5. 党的二十大报告提出全面推进乡村振兴. 为振兴乡村经济, 某市一知名电商平台决定为乡村的特色产品开设直播带货专场. 该特色产品的热卖黄金时段为2023年2月1日至4月1日, 为了解直播的效果和关注度, 该电商平台统计了已直播的2023年2月1日至2月5日时段的相关数据, 这5天的第 x 天到该电商平台专营店购物人数 y (单位: 万人)的数据如下表:

日期	2月1日	2月2日	2月3日	2月4日	2月5日
第 x 天	1	2	3	4	5
人数 y (单位: 万人)	75	84	93	98	100

依据表中的统计数据, 该电商平台直播黄金时间的天数 x 与到该电商平台专营店购物的人数 y (单位: 万人)具有较强的线性相关关系, 经计算得, 到该电商平台专营店购物人数 y 与直播天数 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=6.4x+a$. 请预测从2023年2月1日起的第38天到该专营店购物的人数(单位: 万人)为

- A. 312 B. 313 C. 314 D. 315
6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 半焦距为 c . 在椭圆上

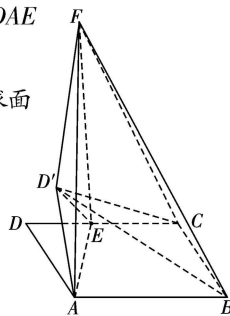
存在点 P 使得 $\frac{a}{\sin \angle PF_1 F_2}=\frac{c}{\sin \angle PF_2 F_1}$, 则椭圆离心率的取值范围是

- A. $[\sqrt{2}-1, 1)$ B. $(\sqrt{2}-1, 1)$
C. $(0, \sqrt{2}-1)$ D. $(0, \sqrt{2}-1]$
7. 如图(一)所示, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=\sqrt{3}, AD=1, AF \perp$ 平面 $ABCD$ 且 $AF=3$, 点 E 为线段 CD (除端点外)上的动点, 沿直线 AE 将 $\triangle DAE$

翻折到 $\triangle D'AE$, 则下列说法中正确的是

- A. 当点 E 固定在线段 CD 的某位置时, 点 D' 的运动轨迹为球面
B. 存在点 E , 使 $AB \perp$ 平面 $D'AE$
C. 点 A 到平面 BCF 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D. 异面直线 EF 与 BC 所成角的余弦值的取值范围

是 $(\frac{\sqrt{13}}{13}, \frac{\sqrt{10}}{10})$



图(一)

8. 若不等式 $tc^{tx} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln(x-1) \geq 0$ 对任意 $x \in [2c+1, +\infty)$ 恒成立, 则正实数 t 的取值范围是

- A. $\left[\frac{\ln 2}{2c+1}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{\ln 2+1}{2c+1}, +\infty\right)$
C. $\left(0, \frac{\ln 2+1}{2c+1}\right)$ D. $\left[\frac{\ln 2}{2c+1}, \frac{\ln 2+1}{2c+1}\right]$

二、多选题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AA_1}$, $\vec{CF} = \frac{3}{4}\vec{CC_1}$, 则

- A. $\angle EBF$ 为钝角
B. $AD_1 \perp A_1C$
C. $ED \parallel$ 平面 B_1D_1F

D. 直线 EF 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

10. 若函数 $f(x) = 2\cos\omega x(\cos\omega x - \sin\omega x) - 1$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则

- A. $f\left(-\frac{\pi}{24}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$ 内有 5 个零点 D. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-1, 1]$

11. 已知点 P 为定圆 O 上的动点, 点 A 为圆 O 所在平面上的定点, 线段 AP 的中垂线交直线 OP 于点 Q , 则点 Q 的轨迹可能是

- A. 一个点 B. 直线 C. 椭圆 D. 双曲线

12. 已知函数 $f(x) = e^x \ln(x+1)$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数, 则

- A. 函数 $y=f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增
B. 函数 $y=f'(x)$ 有唯一极小值
C. 函数 $y=f(x)-x$ 在 $(-1, 0)$ 上有且只有一个零点 t , 且 $t \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$
D. 对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $f(x_1+x_2) > f(x_1) + f(x_2)$ 恒成立

2023 年邵阳市高三第二次联考试题卷(数学) 第 3 页(共 6 页)

三、填空题(本大题4小题,每小题5分,共20分)

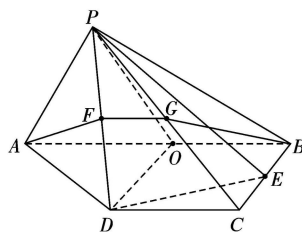
13. 若 $a > 0, b > 0, a + b = 9$, 则 $\frac{36}{a} + \frac{a}{b}$ 的最小值为_____.
14. 在数学中,有一个被称为自然常数(又叫欧拉数)的常数 $e \approx 2.71828$. 小明在设置银行卡的数字密码时,打算将自然常数的前6位数字2,7,1,8,2,8进行某种排列得到密码. 如果排列时要求两个2相邻,两个8不相邻,那么小明可以设置的不同密码共有_____个.
15. 已知直线 l 是曲线 $y = \ln(x-2) + 2$ 与 $y = \ln(x-1)$ 的公切线,则直线 l 与 x 轴的交点坐标为_____.
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, na_{n+1} = 2(n+2)a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$ _____, $S_n + 2 =$ _____.

四、解答题(本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分10分) 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 2, S_{n+1} = S_n + 4a_n - 3$, 记 $b_n = \log_2(a_n - 1) + 3$.
- (1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2) 已知 $c_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{b_n + 1}{b_n b_{n+1}}$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,
- 求证: $T_n \geq \frac{2}{21}$.

18. (本小题满分12分) 人类从未停下对自然界探索的脚步,位于美洲大草原点 C 处正上空 $100\sqrt{3}$ m 的点 P 处,一架无人机正在对猎豹捕食羚羊的自然现象进行航拍. 已知位于点 C 西南方向的草丛 A 处潜伏着一只饥饿的猎豹,猎豹正盯着其东偏北 15° 方向上点 B 处的一只羚羊,且无人机拍摄猎豹的俯角为 45° ,拍摄羚羊的俯角为 60° ,假设 A, B, C 三点在同一水平面上.
- (1) 求此时猎豹与羚羊之间的距离 AB 的长度;
- (2) 若此时猎豹到点 C 处比到点 B 处的距离更近,且开始以 25 m/s 的速度出击,与此同时机警的羚羊以 20 m/s 的速度沿北偏东 15° 方向逃跑,已知猎豹受耐力限制,最多能持续奔跑 600 m,试问猎豹这次捕猎是否有成功的可能? 请说明原因.

19. (本小题满分 12 分) 如图(二)所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是等腰梯形, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 4$. 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, O 为 AB 的中点, $\angle DAO = \angle AOP = 60^\circ$, $OA = OP$, E, F, G 分别为 BC, PD, PC 的中点.



图(二)

- (1) 求证: 平面 $PCD \perp$ 平面 $AFGB$;
(2) 求平面 PDE 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的正切值.

20. (本小题满分 12 分) 为响应习近平总书记“全民健身”的号召, 促进学生德智体美劳全面发展, 某校举行校园足球比赛. 根据比赛规则, 淘汰赛阶段, 参赛双方有时需要通过“点球大战”的方式决定胜负. “点球大战”的规则如下:

- ① 两队各派 5 名队员, 双方轮流踢点球, 累计进球个数多者胜;
- ② 如果在踢满 5 轮前, 一队的进球数已多于另一队踢满 5 轮最多可能射中的球数, 则不需要再踢(例如: 第 4 轮结束时, 双方“点球大战”的进球数比为 2:0, 则不需要再踢第 5 轮);
- ③ 若前 5 轮“点球大战”中双方进球数持平, 则从第 6 轮起, 双方每轮各派 1 人踢点球, 若均进球或均不进球, 则继续下一轮, 直到出现一方进球另一方不进球的情况, 进球方胜出.

假设每轮点球中进球与否互不影响, 各轮结果也互不影响.

- (1) 假设踢点球的球员等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门, 门将也会等可能地选择球门的左、中、右三个方向来扑点球, 而且门将即使方向判断正确, 左右两边将球扑出的可能性为 $\frac{1}{5}$, 中间方向扑出的可能性

为 $\frac{3}{5}$. 若球员射门均在门内, 在一次“点球大战”中, 求门将在前 4 次扑出点球的个数 X 的分布列和数学期望.

- (2) 现有甲、乙两队在淘汰赛中相遇, 需要通过“点球大战”来决定胜负. 设甲队每名队员射进点球的概率均为 $\frac{3}{4}$, 乙队每名队员射进点球的概率均为 $\frac{2}{3}$, 若甲队先踢, 求甲队恰在第 4 轮取得胜利的概率.

21. (本小题满分 12 分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < a < 10, b > 0)$ 的右顶点为 A ,

左焦点 $F(-c, 0)$ 到其渐近线 $bx + ay = 0$ 的距离为 2, 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l_1 交双曲

线 C 于 A, B 两点, 且 $|AB| = \frac{8\sqrt{10}}{3}$.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 过点 $T(6, 0)$ 的直线 l_2 与双曲线 C 交于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 分别与直线 $x = 6$ 相交于 M, N 两点, 试问: 以线段 MN 为直径的圆是否过定点? 若过定点, 求出定点的坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = e^x \cos x, g(x) = x - \cos x$.

(1) 对任意的 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $tf(x) - g'(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围;

(2) 设方程 $f(x) = g'(x)$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$ 内的根从小到大依次为 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, 求证: $x_{n+1} - x_n > 2\pi$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

