# 第一届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

**1.** 在$\triangle ABC$中，$D$、$E$分别为边$AB$、$AC$的中点，$BE$与$CD$交于点$G$，$\triangle ABE$的外接圆与$\triangle ACD$的外接圆交于点$P$($P$与点$A$不重合)，$AG$的延长线与$\triangle ACD$的外接圆交于点$L$($L$与点$A$不重合). 证明：$PL /\!/ CD$.

**2.** 已知集合

$$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\geqslant\frac{1}{4}x^2\right\},N=\left\{(x,y)\,\middle|\,y\leqslant-\frac{1}{4}x^2+x+7\right\},$$

$$D_r(x_0,y_0)=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2\}.$$

试求最大的$r$，使得$D_r(x_0,y_0)\subset M\cap N$.

**3.** 求方程$3^p+4^p=n^k$的正整数解$(p,n,k)$，其中，$p$为素数，$k>1$.

**4.** 平面上满足任意三点不共线的$n$个点$P_1,P_2,\cdots,P_n$构成的集合为$D$，在任意两点之间连一条线段，且每条线段的长互不相等. 在一个三角形的三条边中，长度非最长、也非最短的边称为该三角形的“中边”；若一个三角形的三条边均为中边(不一定是这个三角形的中边)，则称这个三角形为集合$D$中的一个“中边三角形”. 一条不过点$P_i(i=1,2,\cdots,n)$的直线$l$将集合$D$分成两个子集$D_1$、$D_2$. 若无论这$n$个点如何分布，也无论$l$如何选取，总存在一个子集$D_k$ $(k\in\{1,2\})$，使得$D_k$中存在中边三角形. 求$n$的最小值.

**5.** 已知$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别与边$BC$、$CA$、$AB$切于点$D$、$E$、$F$，$AI$、$BI$、$CI$分别与$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$交于点$L$、$M$、$N$，$LD$、$ME$、$NF$分别与$\odot O$交于点$P$、$Q$、$R$. 过$P$作$PA$的垂线$l_A$，过$Q$作$QB$的垂线$l_B$，过$R$作$RC$的垂线$l_C$. 证明：$l_A$、$l_B$、$l_C$三线共点.

**6.** 设正实数$a$、$b$、$c$满足$a^3+b^3+c^3=3$. 证明：$\dfrac{1}{a^2+a+1}+\dfrac{1}{b^2+b+1}+\dfrac{1}{c^2+c+1}\geqslant1$.

**7.** 设$a$、$b$为正整数，$a^2+b^2$除以$a+b$的商为$q$，余数为$r$，且$q^2+r=2\,010$. 求$ab$的值.

**8.** 一名科学家发明了一台时间机器，形似一条地铁环形轨道. 现在(2010 年)为第一站台，第 2，3，…，2 009 站台依次为 2011 年，2012 年，……，4018 年，第 2 010 站又回到现在(出发站台). 后来，这台机器出现了程序错误，使得其运行规则变为：乘客指定一个时间(即站台号)，机器首先到达指定站台，然后每隔 4 站，停靠在第 5 站，若所停靠的站台号为 2 的正整数次幂，则向后退 2 站停靠(如 $17\to22\to27\to32\to30\to35\to\cdots$)；若在第一站台停靠，则停止工作. 试问：

(1)这台机器能否迷失在时间轨道中而无法回到现在(即不在第一站台停靠)？

(2)若最终能够回到现在，则该机器最多能停靠多少个站台？

——答案请参考《中等数学》2010 年第 9 期