秘密★启用前

2023年省际名校联考二(冲刺卷)
数学参考答案详解及评分说明

评分说明:

1. 考生如按其他方法或步骤解答,正确的,同样给分;有错的,根据错误的性质,参照评分说明中相应的规定评分。

2. 计算题只有最后答案而无演算过程的,不给分;只写出一般公式但未能与试题所给的具体条件联系的,不给分。

A卷选择题答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. A

【解析】$\because z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}-1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,$\therefore |z|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. C

【解析】$1,2\in\mathbf{N}$,$\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{N}$,故$\mathbf{N}$不是数域,A错误,同理B错误;任意$a,b\in\mathbf{Q}$,都有$a+b$、$a-b$、$ab$、$\dfrac{a}{b}\in\mathbf{Q}$(除数$b\neq 0$),故$\mathbf{Q}$是一个数域.对于集合$A=\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$,$1,1\in A$,$1-1=0\notin A$,故$\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$不是数域.

3. B

【解析】设$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AN}$,

$\because\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\dfrac{\lambda}{6}\overrightarrow{AN}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,

$\because$ N,P,C三点共线,

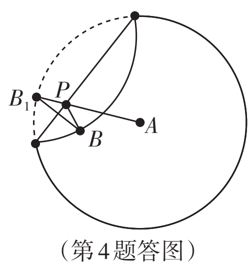
又$\because\dfrac{\lambda}{6}+\dfrac{1}{6}=1$,$\therefore\lambda=5$.

$\therefore\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AN}$,

$\therefore\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.

4. D

【解析】设点B_1,B关于"折痕"所在直线对称,即折前点B在圆上对应的点为点B_1.连接AB_1交"折痕"于点P,则点P到A,B两点距离之和最小,且$|BP|+|AP|=|AB_1|=4$.所以P的轨迹是以A,B为焦点,且长轴长为$2a=4$的椭圆,焦距$2c=|AB|=2$,$c=1$,故短半轴长$b=\sqrt{3}$,所以$\triangle MAB$面积的最大值为$\dfrac{1}{2}\times 2c\times b=\sqrt{3}$.



(第4题答图)

5. D

【解析】记小李路上所需时间为X,小王路上所需时间为Y.

对于A,$P(Y<28)=\dfrac{1-P(28\leqslant Y\leqslant 52)}{2}=0.00135<0.01$,所以A合理;

对于B,小李在7:50前到达晋祠的概率为$P(X<50)=\dfrac{1-P(38\leqslant X\leqslant 50)}{2}+P(38\leqslant X\leqslant 50)=0.99865$,小王在

7:50前到达晋祠的概率为$P(Y<50)<P(Y\leqslant 52)=\dfrac{1-P(28\leqslant Y\leqslant 52)}{2}+P(28\leqslant Y\leqslant 52)=0.99865$，小李在7:50前到达晋祠的概率要大，所以选项B合理；

对于C，小李在7:48前到达晋祠的概率为$P(X<48)=\dfrac{1-P(40\leqslant X\leqslant 48)}{2}+P(40\leqslant X\leqslant 48)=0.97725$，小王在7:48前到达晋祠的概率为$P(Y<48)=\dfrac{1-P(32\leqslant Y\leqslant 48)}{2}+P(32\leqslant X\leqslant 48)=0.97725$，选项C合理；

对于D，小李在7:44前到达晋祠的概率为$P(X<44)=\dfrac{1}{2}$，小王在7:44前到达晋祠的概率为$P(Y<44)=\dfrac{1-P(36\leqslant Y\leqslant 44)}{2}+P(36\leqslant X\leqslant 44)=0.84135$，小王在7:44前到达晋祠的概率要大，选项D不合理.

6. C

【解析】$f'(x)=xe^x-ax^2-x=x(e^x-ax-1)$，

记$g(x)=e^x-ax-1(x\geqslant 0)$，$g'(x)=e^x-a\geqslant e^x-1\geqslant 0$，故$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

$g(x)\geqslant g(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，故$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，故$f(x)$有最小值$f(0)=-1$，无最大值.

7. B

【解析】设底面四边形$ABCD$的中心为O，连接PO，则$PO=h$.

设点M到平面PCD的距离为MQ，则$V_{M-PCD}=V_{P-MCD}$即$\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle PCD}\times MQ=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle MCD}\times PO$

$\therefore\ MQ=\dfrac{S_{\triangle MCD}\times PO}{S_{\triangle PCD}}=\dfrac{2h}{\sqrt{h^2+1}}=2\sqrt{\dfrac{h^2}{h^2+1}}=2\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{h^2}}}$，

$\because\ h\in[\sqrt{3},2\sqrt{2}]$，$\therefore\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{h^2}}\in\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{8}{9}\right]$，

$\therefore\ MQ\in\left[\sqrt{3},\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right]$.

8. A

【解析】当点P为$(0,1)$或$(0,3)$时，存在$Q(e^{-a},0)$，使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$. 当$P$点横坐标非零时，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，即$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-1$，$-\dfrac{1}{k_{OP}}=k_{OQ}$. 可求得$k_{OP}\in(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$，$-\dfrac{1}{k_{OP}}\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. 设$Q(x,\ln x+a)$，$k_{OQ}=\dfrac{\ln x+a}{x}$. 记函数$f(x)=\dfrac{\ln x+a}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1-a-\ln x}{x^2}$，令$f'(x)>0$，得$0<x<e^{1-a}$；令$f'(x)<0$，得$x>e^{1-a}$，故$f(x)$在$(0,e^{1-a})$上单调递增，在$(e^{1-a},+\infty)$上单调递减，$f(x)_{\max}=f(e^{1-a})=\dfrac{1-a+a}{e^{1-a}}=e^{a-1}$，$f(x)$值域为$(-\infty,e^{a-1}]$，从而$k_{OQ}\in(-\infty,e^{a-1}]$，由题$\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]\subseteq(-\infty,e^{a-1}]$，从而$e^{a-1}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$a\geqslant 1-\dfrac{\ln 3}{2}$，故$a$的取值范围是$\left[1-\dfrac{\ln 3}{2},+\infty\right)$.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. AD

【解析】$f(x)=\cos(x+2\varphi)-2\cos\varphi\cos(x+\varphi)-\sin x$

$$=\cos\varphi\cos(x+\varphi)-\sin\varphi\sin(x+\varphi)-2\cos\varphi\cos(x+\varphi)-\sin x$$

$$=-\cos\varphi\cos(x+\varphi)-\sin\varphi\sin(x+\varphi)-\sin x$$

$$=-\cos x-\sin x$$

$$=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

对于A，令$x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$x=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，当$k=0$时，$x=-\frac{\pi}{4}$，

$\therefore f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$中心对称，A正确.

对于B，令$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$x=\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，B错误.

对于C，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则$-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$ 函数$f(x)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递减，C错误.

对于D，当$x=\frac{\pi}{4}$时，$f(x)$取最小值$-\sqrt{2}$，D正确.

10. BCD

【解析】对于A选项，E在棱A_1B_1上运动时，$DE\subset$平面A_1B_1CD，连接A_1D,AD_1，则$AD_1\perp$平面A_1B_1CD，$\therefore AD_1\perp DE$，A错误.

对于B选项，平面A_1DE与平面$ABCD$所成二面角即为$\angle A_1DA=\frac{\pi}{4}$，B正确.

对于C选项，$BC\parallel AD$，$\therefore BC\parallel$平面AED，

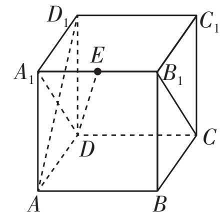
$\therefore$ 当P是A_1C与平面AED的交点时，$BC\parallel$平面AEP，C正确.

对于D选项，连接BC_1与B_1C交于O，连接PO，

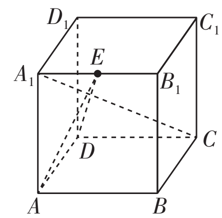
则在$\triangle A_1B_1C$中，$PO\parallel A_1B_1$，又$\because PO\subset$平面PBC_1，$A_1B_1\not\subset$平面PBC_1，

$\therefore A_1B_1\parallel$平面$PBC_1$，$\therefore E$到平面$PBC_1$的距离为定值，

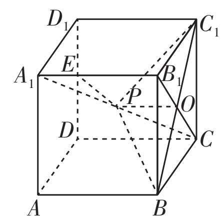
$\therefore$ 三棱锥$E-PBC_1$体积不变，D正确.



（第10题A选项答图）



（第10题C选项答图）



（第10题D选项答图）

11. ABD

【解析】每次传球可将球传给另外两人中的任何一人，故n次传球共2^n种方法数，若第n次传球后球在甲手中，则第$n-1$次传球后球必不在甲手中，从而$a_n=2^{n-1}-a_{n-1}$，$a_n+a_{n-1}=2^{n-1}$，故A正确；由$a_n+a_{n-1}=2^{n-1}$，得$(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}=-(-2)^{n-1}$，从而$(-1)^n a_n-(-1)^1 a_1=-(-2)^1-(-2)^2-\cdots-(-2)^{n-1}=-\frac{-2\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}=\frac{2+(-2)^n}{3}$，

又$a_1=0$，故$a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$，故B正确；$a_n-2a_{n-1}=2(-1)^n$，故$\{a_n-2a_{n-1}\}$为等比数列，又$a_n+a_{n-1}=2^{n-1}$，故$\{a_n+a_{n-1}\}$为等比数列，故C错误；当$n$为偶数时，$a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}>\frac{2^n}{3}$，易知$a_n+2b_n=2^n$，则$2(b_n-a_n)=2^n-3a_n<0$，$a_n>b_n$，故D正确.

12. BCD

【解析】不妨设$\angle PFx=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则$2+|PF|\cos\theta=|PF|$, $\therefore |PF|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$,

同理$|MF|=\dfrac{2}{1+\sin\theta}$,$|QF|=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$,$|NF|=\dfrac{2}{1-\sin\theta}$.

对于A,$\dfrac{1}{|PF|}+\dfrac{1}{|QF|}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}+\dfrac{1+\cos\theta}{2}=1$,A错误;

对于B,$|PQ|=|PF|+|QF|=\dfrac{2}{1-\cos\theta}+\dfrac{2}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta}$,同理$|MN|=\dfrac{4}{\cos^2\theta}$,

所以$\dfrac{1}{|PQ|}+\dfrac{1}{|MN|}=\dfrac{\sin^2\theta}{4}+\dfrac{\cos^2\theta}{4}=\dfrac{1}{4}$,B正确;

对于C,$|PQ|+|MN|=\dfrac{4}{\sin^2\theta}+\dfrac{4}{\cos^2\theta}=\dfrac{4}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{16}{\sin^2 2\theta}\geqslant 16$,当且仅当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时取最小值16,C正确;

对于D,直角三角形GFH中,$|GH|^2=|GF|^2+|HF|^2$

$$=\left(\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\sin\theta}-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)^2=\left(\frac{2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)^2+\left(\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\right)^2=\frac{4\left(\cos^6\theta+\sin^6\theta\right)}{\sin^4\theta\cos^4\theta}$$

$$=\frac{4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta\right)}{\sin^4\theta\cos^4\theta}=\frac{4\left(1-3\sin^2\theta\cos^2\theta\right)}{\sin^4\theta\cos^4\theta},$$

令$\dfrac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=t$,$t\in[4,+\infty)$,即$|GH|^2=4(t^2-3t)$,$t\in[4,+\infty)$,

所以当$t=4$时,$|GH|$最小,此时$\theta=\dfrac{\pi}{4}$,即l_1,l_2关于x轴对称,所以G,H两点也关于x轴对称,故直线GH的斜率不存在,D正确.

B卷选择题答案

1. A 2. C 3. B 4. D 5. D 6. C 7. B 8. A 9. AD 10. BCD 11. ABD 12. BCD

AB卷非选择题答案

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 243

【解析】28×75%=21,可知第75百分位数为第21项和第22项数据的平均数$\dfrac{230+256}{2}$=243.

14. $2+\sqrt{3}$或1

【解析】圆C与直线l_1,l_2都相切,所以$\dfrac{\left|\sqrt{3}a-2\right|}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{|a+2|}{\sqrt{1+3}}=r$,即$\left|\sqrt{3}a-2\right|=|a+2|$,当$\sqrt{3}a-2=a+2$时,

$a=2\left(\sqrt{3}+1\right)$,此时$r=2+\sqrt{3}$;当$2-\sqrt{3}a=a+2$时,$a=0$,此时$r=1$.

15. $\dfrac{1}{630}$ $\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}$

【解析】由题意知,将杨辉三角从第1行开始的每一个数C_n^r都换成分数$\dfrac{1}{(n+1)C_n^r}$,得到的三角形为“莱布尼茨三角形”,观察表中数字,题中要求第8行第5个数,所以n=8,r=4,所以第8行第5个数为$\dfrac{1}{(8+1)C_8^4}=\dfrac{1}{630}$.

$\because \dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}=\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}$,

$\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}+\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}=\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}$,

$\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-4}}+\dfrac{1}{(n-1)C_{n-2}^{n-5}}=\dfrac{1}{(n-2)C_{n-3}^{n-5}},\cdots,$

$\dfrac{1}{5C_4^1}+\dfrac{1}{5C_4^2}=\dfrac{1}{4C_3^1},\dfrac{1}{4C_3^1}+\dfrac{1}{4C_3^0}=\dfrac{1}{3C_2^0},$

将上述各式相加，得$\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+\dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}+\dfrac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}+\cdots+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3},$

$\therefore \dfrac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}+S_n=\dfrac{1}{3},$

$\therefore S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{(n-1)n(n+1)}.$

16. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】由题$f\left(x^3+\dfrac{\pi}{3}\right)$为奇函数，故$f\left((-x)^3+\dfrac{\pi}{3}\right)=-f\left(x^3+\dfrac{\pi}{3}\right)$，等价于$f\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=-f(x)$，

由$g(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称，可得$g\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=g(x)$，

$-f(x)+g(x)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)+g\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right),$

故$g(x)=\dfrac{\sin x+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，故$g(x)$的最大值是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (1)**证明**：连接MD，

$\because \triangle BCD$是等边三角形，

$\therefore BD=CD.$

在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，$\angle ADB=\angle ADC$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$，

$\therefore AB=AC$， ······························ 2分

$\because M$是BC边的中点，

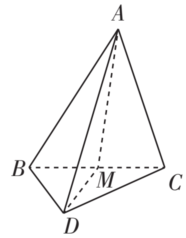
$\therefore BC\perp MA, BC\perp MD.$

$\because MA\cap MD=M$，$MA\subset$平面AMD，$MD\subset$平面AMD，

$\therefore BC\perp$平面AMD，

又$AD\subset$平面AMD，

$\therefore BC\perp AD.$ ······························ 4分



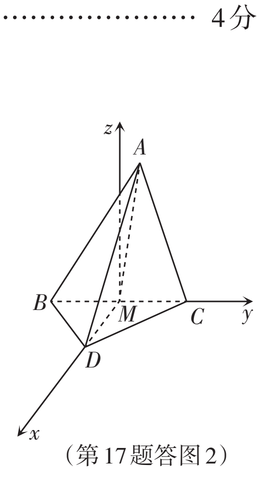
（第17题答图1）

(2)选①解：以M为原点建立空间直角坐标系如图所示，

由题可得：$A\left(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(0,-\sqrt{3},0\right)$，$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$D(3,0,0)$，$M(0,0,0)$.

设平面ACD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(3,-\sqrt{3},0\right)$.

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}(x,y,z)\cdot\left(\dfrac{3}{2},\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)=0,\\ (x,y,z)\cdot\left(3,-\sqrt{3},0\right)=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}\dfrac{3}{2}x+\sqrt{3}y-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}z=0,\\ 3x-\sqrt{3}y=0,\end{cases}$



（第17题答图2）

令 $x=1$,则 $y=\sqrt{3}, z=\sqrt{3}$,

$\therefore \boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$, ·· 6分

又 $\because \overrightarrow{BD}=(3,\sqrt{3},0)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ·· 8分

$\therefore$ 直线 BD 与平面 ACD 所成角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ·· 10分

选②解:设三棱锥的高为 h,

$\because V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}h=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{1}{2}\times h=3\sqrt{3}$,

$\therefore h=3=MA$,

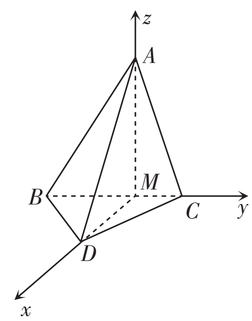
$\therefore MA\perp$ 底面 BCD. ·· 6分

以 M 为原点建立直角坐标系如图所示,

则 $A(0,0,3), B(0,-\sqrt{3},0), C(0,\sqrt{3},0), D(3,0,0), M(0,0,0)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z), \overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},-3), \overrightarrow{CD}=(3,-\sqrt{3},0)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},-3)=0,\\ (x,y,z)\cdot(3,-\sqrt{3},0)=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}\sqrt{3}y-3z=0,\\ 3x-\sqrt{3}y=0,\end{cases}$



(第17题答图3)

令 $x=1$,则 $y=\sqrt{3}, z=1$, $\therefore \boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$.

又 $\because \overrightarrow{BD}=(3,\sqrt{3},0)$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$, ·· 8分

$\therefore$ 直线 BD 与平面 ACD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ·· 10分

18. **解**:由正弦定理得 $2\sin C\cos B=(3\sin A-2\sin B)\cos C$,

$\therefore 2\sin C\cos B=3\sin A\cos C-2\sin B\cos C$, ·· 2分

$\therefore 2\sin C\cos B+2\sin B\cos C=3\sin A\cos C$,

$\therefore 2\sin(B+C)=3\sin A\cos C$, ·· 4分

$\therefore 2\sin A=3\sin A\cos C$,

$\because A$ 为三角形内角, $\sin A\neq 0$, $\therefore \cos C=\dfrac{2}{3}$. ·· 5分

(2)由(1)可得, $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

$\because B=2C$, $\therefore \sin B=\sin 2C=2\sin C\cos C=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$, $\cos B=1-2\sin^2 C=-\dfrac{1}{9}$. ·· 6分

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\dfrac{7\sqrt{5}}{27}$. ·· 8分

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}, a=7$,

$\therefore b=12, c=9$.

$\because\ S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 7\times 12\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=14\sqrt{5}$, ………………………………………… 10分

设$\triangle ABC$内切圆半径为r,

则$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=14r=14\sqrt{5}$,$r=\sqrt{5}$,

$\therefore\ S_{\triangle AMC}=\dfrac{1}{2}\times 12\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$. ………………………………………… 12分

19. **解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

依题意得$\begin{cases}1+d=q,\\2+2d=q^2,\end{cases}$ ………………………………………… 1分

解得$\begin{cases}d=1,\\q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}d=-1,\\q=0,\end{cases}$(舍) ………………………………………… 3分

故$a_n=1+(n-1)\times 1=n$,$b_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$.………………………………………… 4分

(2)$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}=\left(1+2^0\right)+\left(3+2^2\right)+\cdots+\left(2n-1+2^{2n-2}\right)$

$=\left[1+3+\cdots+(2n-1)\right]+\left(2^0+2^2+\cdots+2^{2n-2}\right)$

$=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}+\dfrac{2^0\left(1-4^n\right)}{1-4}$

$=n^2+\dfrac{4^n-1}{3}$,………………………………………… 6分

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=2\times 2^1+4\times 2^3+6\times 2^5+\cdots+2(n-1)\times 2^{2n-3}+2n\times 2^{2n-1}$

$=1\times 4^1+2\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+(n-1)\times 4^{n-1}+n\times 4^n$,

$\displaystyle 4\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=1\times 4^2+2\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+(n-1)\times 4^n+n\times 4^{n+1}$, ………………………………………… 8分

两式相减得

$\displaystyle -3\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=4+4^2+4^3+\cdots+4^n-n\times 4^{n+1}$

$=\dfrac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n\times 4^{n+1}$

$=\dfrac{1-3n}{3}\cdot 4^{n+1}-\dfrac{4}{3}$, ………………………………………… 10分

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=\dfrac{3n-1}{9}\cdot 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}$, ………………………………………… 11分

因此,$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}c_k=\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}c_{2k}=n^2+\dfrac{4^n-1}{3}+\dfrac{3n-1}{9}\cdot 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{(12n-1)4^n+1}{9}+n^2$.

所以,数列$\{c_n\}$的前$2n$项和为$\dfrac{(12n-1)4^n+1}{9}+n^2$. ………………………………………… 12分

20. **解**:(1)$(0.014+0.006)\times 10=0.2$,即随机调查一位市民需要降低追求目标或充分休息的概率为0.2.

所以$X\sim B(10,0.2)$,$\therefore\ E(X)=10\times 0.2=2$; ………………………………………… 2分

(2)样本中压力分数在$[80,90)$的人数为$0.014\times 10\times 1000=140$,样本中压力分数在$[90,100]$的人数为$0.006\times 10\times 1000=60$,用样本量比例分配的分层随机抽样的方法抽取的10人中,压力分数在$[80,90)$的样本量为$\dfrac{140}{140+60}\times 10=7$,在$[90,100]$的样本量为$\dfrac{60}{140+60}\times 10=3$.

从这10人中随机选出3人共$C_{10}^3=120$种选法,其中恰有两人压力分数在$[80,90)$中有$C_7^2C_3^1=63$种选法,选出

的3人中恰有2人压力分数在[80,90)中的概率为$P=\dfrac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{40}$; ······ 5分

(3)证明:①$\overline{\omega}=\dfrac{m\overline{x}+n\overline{y}}{m+n}=\dfrac{m\overline{x}}{m+n}+\dfrac{n\overline{y}}{m+n}$,即得证, ······ 7分

②$s^2=\dfrac{1}{m+n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{\omega}\right)^2+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_j-\overline{\omega}\right)^2\right]$

$=\dfrac{1}{m+n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{\omega}\right)^2+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_j-\overline{y}+\overline{y}-\overline{\omega}\right)^2\right]$, ······ 9分

$\because\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i-m\overline{x}=0$,

$\therefore\sum\limits_{i=1}^{m}2\left(x_i-\overline{x}\right)\left(\overline{x}-\overline{\omega}\right)=2\left(\overline{x}-\overline{\omega}\right)\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)=0$,

同理可得,$\sum\limits_{j=1}^{n}2\left(y_j-\overline{y}\right)\left(\overline{y}-\overline{\omega}\right)=0$, ······ 10分

$\therefore s^2=\dfrac{1}{m+n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)^2+\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\overline{x}-\overline{\omega}\right)^2+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(y_j-\overline{y}\right)^2+\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\overline{y}-\overline{\omega}\right)^2\right]$

$=\dfrac{1}{m+n}\left[ms_1^2+m(\overline{x}-\overline{\omega})^2+ns_2^2+n(\overline{y}-\overline{\omega})^2\right]$,

$\therefore s^2=\dfrac{m[s_1^2+(\overline{x}-\overline{\omega})^2]+n[s_2^2+(\overline{y}-\overline{\omega})^2]}{m+n}$,即得证. ······ 12分

21. **解**:(1)双曲线$E:\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的左、右焦点分别为$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,

设$A\left(t,-\dfrac{2}{3}t\right)(t\neq0)$.

$k_1=\dfrac{-\dfrac{2}{3}t-0}{t+2}=-\dfrac{2t}{3(t+2)}$,同理可得$k_2=-\dfrac{2t}{3(t-2)}$.

$\therefore\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=-\dfrac{3(t+2)}{2t}-\dfrac{3(t-2)}{2t}=-\dfrac{6t}{2t}=-3$. ······ 3分

(2)设$M\left(x_1,y_1\right)$,$N\left(x_2,y_2\right)$,$P\left(x_3,y_3\right)$,$Q\left(x_4,y_4\right)$,

直线AF_1方程为:$y=k_1(x+2)$,

代入双曲线方程可得:$\left(1-3k_1{}^2\right)x^2-12k_1{}^2x-12k_1{}^2-3=0$,

所以$x_1+x_2=\dfrac{12k_1{}^2}{1-3k_1{}^2}$,$x_1x_2=\dfrac{-12k_1{}^2-3}{1-3k_1{}^2}$, ······ 5分

$k_{OM}+k_{ON}=\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_1x_2+y_2x_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{k_1\left(x_1+2\right)x_2+k_1\left(x_2+2\right)x_1}{x_1x_2}$

$=\dfrac{2k_1x_1x_2+2k_1\left(x_2+x_1\right)}{x_1x_2}$

$=2k_1+\dfrac{\dfrac{24k_1{}^3}{1-3k_1{}^2}}{\dfrac{-12k_1{}^2-3}{1-3k_1{}^2}}$

$= \dfrac{2k_1}{4k_1{}^2+1}$， ………………………………………………………………………………………… 8分

同理 $k_{OP}+k_{OQ}=\dfrac{2k_2}{4k_2{}^2+1}$，

即 $\dfrac{2k_1}{4k_1{}^2+1}+\dfrac{2k_2}{4k_2{}^2+1}=0$， ………………………………………………………………………………… 9分

即 $\left(k_1+k_2\right)\left(4k_1k_2+1\right)=0$，

$\therefore k_1+k_2=0$，或 $k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$.

又 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=-3$， ……………………………………………………………………………………………… 10分

若 $k_1+k_2=0$，无解，舍去.

$\therefore k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$，解得 $k_1=-\dfrac{1}{4},k_2=1$，或 $k_1=1,k_2=-\dfrac{1}{4}$

若 $k_1=-\dfrac{1}{4},k_2=1$，由 A 在直线 AF_1 上可得，$-\dfrac{2}{3}t=-\dfrac{1}{4}(t+2)$

$\therefore t=\dfrac{6}{5}$，此时 $A\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$.

若 $k_1=1,k_2=-\dfrac{1}{4}$，由 A 在直线 AF_1 上可得，$-\dfrac{2}{3}t=t+2$

$\therefore t=-\dfrac{6}{5}$，此时 $A\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

$\therefore$ 存在点 $A\left(\dfrac{6}{5},-\dfrac{4}{5}\right)$，或 $\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，满足 $k_{OM}+k_{ON}+k_{OP}+k_{OQ}=0$. ……………………………… 12分

22. **解：**(1) $f'(x)=\sin x+x\cos x, f''(x)=2\cos x-x\sin x$. ……………………………………………………… 1分

①当 $x\in\left(2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right],k\in\mathbf{N}$ 时，$f'(x)\geqslant\sin x>0$，$f(x)$ 单调递增，无极值点； …………………………………… 2分

②当 $x\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),k\in\mathbf{N}$ 时，$f''(x)<2\cos x<0$，$f'(x)$ 单调递减，$f'\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$，$f'(2k\pi+\pi)=-(2k\pi+\pi)<0$，故存在唯一 $x_1\in\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right),k\in\mathbf{N}$，使得 $f'\left(x_1\right)=0$，

当 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_1<x<2k\pi+\pi$ 时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2},x_1\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_1,2k\pi+\pi\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 有极大值点 x_1； ………………………… 3分

综上，$f(x)$ 在区间 $(2k\pi,2k\pi+\pi),k\in\mathbf{N}$ 上有1个极值点. …………………………………………………………… 4分

(2)若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'\left(x_0\right)=\sin x_0+x_0\cos x_0=0,\tan x_0=-x_0$. ………………………………………… 5分

$\left|f\left(x_0\right)\right|=\left|x_0\sin x_0\right|=\left|x_0\right|\sqrt{\dfrac{\sin^2x_0}{\sin^2x_0+\cos^2x_0}}=\left|x_0\right|\sqrt{\dfrac{\tan^2x_0}{\tan^2x_0+1}}=\dfrac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2+1}}=\sqrt{x_0^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$， ………… 7分

令 $t=\sqrt{x_0^2+1}\geqslant1$，$\left|f\left(x_0\right)\right|\geqslant\lambda\ln\left(1+x_0^2\right)$，即 $t-\dfrac{1}{t}\geqslant2\lambda\ln t$. ………………………………………………… 8分

记$g(t)=t-\frac{1}{t}-2\lambda\ln t(t\geqslant 1)$,即$g(t)\geqslant 0$,$g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2\lambda}{t}=\frac{t^2-2\lambda t+1}{t^2}$.…………………………………… 9分

①当$\lambda=1$时,$g'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}\geqslant 0$,故$g(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增,$g(t)\geqslant g(1)=0$,符合题意; …………… 10分

②当$\lambda\geqslant 2$时,若$1\leqslant t<2+\sqrt{3}$,则$g'(t)\leqslant\frac{t^2-4t+1}{t^2}<0$,故$g(t)$在$\left(1,2+\sqrt{3}\right)$上单调递减,

由(1):$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上存在极值点,记为$x_1$,则$1<\sqrt{1+x_1^2}<\sqrt{1+\pi^2}<2+\sqrt{3}$,故$g\left(\sqrt{1+x_1^2}\right)<g(1)=0$,不符题意; ………………………………………………………………………… 11分

综上,整数λ的最大值为1. ……………………………………………………………………………………… 12分