

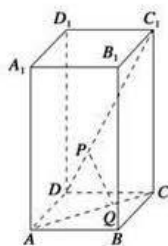
山西大学附中
2022~2023 学年第一学期高三 3 月模块诊断

数学试题

考试时间：120 分 总分：150 分

一. 选择题 本小题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，若 $z=1-i$ ，则复数 z 的模等于 ()
 A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
2. 已知集合 $A=\{y|y=2^x, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B=\{x|x^2 \leq 4\}$ ，则 $A \cap B =$ ()
 A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 0]$ C. $[0, 2]$ D. $(0, 2]$
3. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ，则 $a < b$ 是 $a^2(e^a - e^b) < 0$ 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 在下列区间中，使函数 $f(x)=2022 \cos(x-\frac{\pi}{12})$ 单调递增的区间是 ()
 A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{16} = 1 (k > 0)$ ，若对任意实数 m ，直线 $4x+3y+m=0$ 与 C 至多有一个交点，则双曲线 C 的离心率为 ()
 A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{\sqrt{97}}{9}$
6. 考查下列两个问题：① 已知随机变量 $X \sim B(n, p)$ ，且 $E(X)=4$ ， $D(X)=2$ ，记 $P(X=1)=a$ ；② 甲、乙、丙三人随机到某 3 个景点去旅游，每人只去一个景点，设 A 表示“甲、乙、丙所去的景点互不相同”， B 表示“有一个景点仅甲一人去旅游”，记 $P(A|B)=b$ ，则 ()
 A. $a=b^3$ B. $a=b^4$
 C. $a=b^5$ D. $a=b^6$
7. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1=2$ ， $AB=CB=1$ ，动点 P, Q 分别在线段 C_1D_1 ， AC 上，则线段 PQ 长度的最小值是 ()
 A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$
8. 已知 $a=\frac{3}{2\pi}$ ， $b=\sin \frac{1}{2}$ ， $c=\frac{9}{4\pi^2}$ ，则 ()
 A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $a < c < b$ D. $c < a < b$

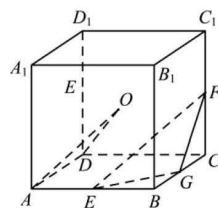


二. 选择题 本小题 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 小明用某款手机性能测试 APP 对 10 部不同品牌的手机的某项性能进行测试, 所得的分数按从小到大的顺序 (相等数据相邻排列) 排列为: 81, 84, 84, 87, x , y , 93, 96, 96, 99, 已知总体的中位数为 90, 则 ()

- A. $x+y=180$
 B. 该组数据的均值一定为 90
 C. 该组数据的众数一定为 84 和 96
 D. 若要使该总体的标准差最小, 则 $x=y=90$

10. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球球心为 O , E 、 F 分别是棱 AB 、 CC_1 的中点, G 在棱 BC 上移动, 则 ()



- A. 对于任意点 G , $OA \parallel$ 平面 EFG
 B. 存在点 G , 使 $OD \perp$ 平面 EFG
 C. 直线 EF 被球 O 截得的线段长为 $\sqrt{3}$
 D. 过直线 EF 的平面截球 O 所得截面圆面积的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

11. 将函数 $g(x) = \frac{1}{2^{\omega x - \varphi}} A \sin \omega x (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的图象向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位后得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 若对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(1-x) = f(x-1)$, 且 $f(-1) = f(3) = 0$, 则 ω 的可能取值为 ()

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\pi}{2}$ D. 2π

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ (e 为自然对数的底数), 过点 (a, b) 作曲线 $f(x)$ 的切线. 下列说法正确的是 ()

- A. 当 $a=0$ 时, 若只能作两条切线, 则 $b = \frac{4}{e^2}$
 B. 当 $a=0$, $b > \frac{4}{e^2}$ 时, 则可作三条切线
 C. 当 $0 < a < 2$ 时, 可作三条切线, 则 $\frac{a}{e^a} < b < \frac{4-a}{e^2}$
 D. 当 $a=2$, $b > 0$ 时, 有且只有两条切线

三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\alpha \in (0, \pi)$, $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 则 $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.

14. 有 4 名男生和 2 名女生共 6 人组成两个志愿者队伍去两个不同的场馆, 要求每队既有男生又有女生, 则不同的分配方法有 _____ 种. (用数字表示)

15. $(x-2)^3(2x+1)^2$ 的展开式中 x 的奇次项的系数之和为 _____.

16. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y=kx (k>0)$ 与 C 相交于 M, N

两点, 若 M, F_1, N, F_2 四点共圆 (其中 M 在第一象限), 且直线 NF_2 倾斜角不小于 $\frac{\pi}{6}$, 则椭圆 C 的实轴长的取值范围是 _____.

四. 解答题: (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (10 分) 在三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a=2b$, 且

$$2c \sin B = a \cos \left(C - \frac{\pi}{6} \right).$$

(1) 求角 C ;

(2) E 为三角形 ABC 所在平面内的一点, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 且 $|\overrightarrow{AE}| = 2$, 求线段 CE 的长.

18. (12 分) 数学家也有一些美丽的错误, 如法国数学家费马于 1640 年提出了以下猜想:

$F_n = 2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) 是质数. 1732 年, 瑞士数学家欧拉算出 $F_5 = 641 \times 6700417$, 该数不是质数.

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n = \log_2(F_n - 1) - 1$ ($n \in \mathbb{N}_+$)

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; 全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

(2) 若 $b_n = (n+1) \log_2 a_{n+1}$, 设为数列 $\left\{ \frac{2}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和, 求出 T_n , 并证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$,

$$1 \leq T_n < 2.$$

19. (12 分) 在东京奥运会中, 甲、乙、丙三名跳水运动员参加小组赛, 已知甲晋级的概率为 p ($0 < p < 1$), 乙、丙晋级的概率均为 q ($0 < q < 1$), 且三人是否晋级相互独立.

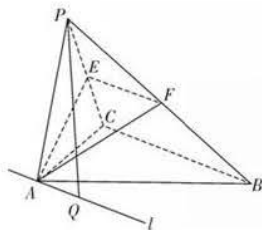
(1) 若甲晋级的概率与乙、丙两人都没有晋级的概率相等, 与乙、丙两人有且仅有一人晋级的概率也相等, 求 p, q ;

(2) 若 $p = \frac{1}{2}$, 记三个人中晋级的人数为 ξ , 若 $\xi = 0$ 时的概率和 $\xi = 3$ 时的概率相等, 求 ξ 的分布列及 $E(\xi)$.

20. (12分)如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,侧面 $PAC \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, ΔPAC 是边长为2的正三角形, $BC=4$, E, F 分别是 PC, PB 的中点, 记平面 AEF 与平面 ABC 的交线为 l .

(1) 证明: 直线 $l \perp$ 平面 PAC ;

(2) 设点 Q 在直线 l 上, 直线 PQ 与平面 AEF 所成的角为 α , 异面直线 PQ 与 EF 所成的角为 θ , 求当 AQ 为何值时, $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$.



21. (12分) 已知抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $x=4$ 分别与 x 轴交于点 P , 与抛物线 E 交于点 Q , 且 $|QF| = \frac{5}{4}|PQ|$.

(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 如图, 设点 A, B, C 都在抛物线 E 上, 若 ΔABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最小值.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a (a > 0, a \neq 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极小值;

(2) 若存在 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq e - 1$ (e 是自然对数的底数), 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

