武汉市2023届高中毕业生四月调研考试
数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	B	A	B	C	B	AD	BCD	ABC	ACD

填空题：

13. -48　　14. $\frac{5}{6}$　　15. $-2,-\frac{4}{3},\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　16. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解答题：

17.（10分）解：

（1）由题意，$S_n=na_n+n(n-1)$，$S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}+n(n+1)$.

两式相减得：$a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+2n$.

整理得：$a_{n+1}-a_n=-2$，所以$\{a_n\}$是等差数列.　　…………5分

（2）由题意：$a_7>0$，$a_8<0$.

由$\{a_n\}$公差为-2，故$a_1+6\cdot(-2)>0$且$a_1+7\cdot(-2)<0$.

解得：$12<a_1<14$.　　…………10分

18.（12分）解：

（1）由正弦定理得：$\sqrt{3}\sin B+\cos B=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$.

$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin(A+B)$，

$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，即$\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B+\cos A\sin B$.

又$\sin B\neq 0$，故$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，即$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

由$0<A<\pi$，得：$A=\frac{\pi}{3}$.　　…………6分

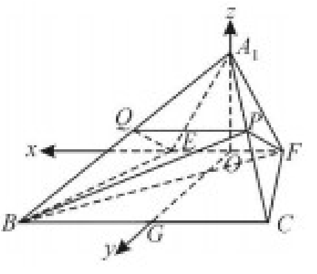
（2）ΔABC面积$S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{1}{2}bc\sin A$，代入$A=\frac{\pi}{3}$，整理得：$a^2=2bc$.

故$\sin^2 A=2\sin B\sin C$，得：$\sin B\sin C=\frac{3}{8}$.

又$\cos(B+C)=-\cos A=-\frac{1}{2}$，即$\cos B\cos C-\sin B\sin C=-\frac{1}{2}$.

所以$\cos B\cos C=-\frac{1}{8}$.　　…………12分

19.（12分）解：



（1）取A_1B中点Q，连接PQ,EQ，

$PQ \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$且$FE \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$，有$PQ \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} FE$.

故四边形$EFPQ$是平行四边形，所以$FP\,/\!/\,EQ$.

又$FP\not\subset$平面A_1BE，$EQ\subset$平面A_1BE，

所以$FP\,/\!/$平面A_1BE.　　…………6分

（2）取EF中点O，BC中点G，由平面$A_1EF\perp$平面$EFCB$，且交线为EF，故$A_1O\perp$平面$EFCB$.

此时，OA_1,OE,OG两两垂直，以O为原点，OE,OG,OA_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如

官方微信公众号：zizzsw　　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　　微信客服：zizzs2018

图所示的空间直角坐标系.

有 $B(2,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$F(-1,0,0)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，A_1C 中点 $P(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\overrightarrow{FP}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{FB}=(3,\sqrt{3},0)$.

设平面 BFP 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ 3x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

又 $\overrightarrow{A_1F}=(-1,0,-\sqrt{3})$，故所求角的正弦值为 $\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1F}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1F}|}=\frac{|-1-3|}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以直线 A_1F 与平面 BFP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ……………12 分

20.（12 分）解：

（1）甲乙正面朝上次数相等的概率为：$(C_3^0\frac{1}{2^3})^2+(C_3^1\frac{1}{2^3})^2+(C_3^2\frac{1}{2^3})^2+(C_3^3\frac{1}{2^3})^2=\frac{5}{16}$.

由对称性，甲正面朝上次数大于乙和小于乙的概率相等.

故甲正面朝上次数大于乙的概率为 $\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{5}{16})=\frac{11}{32}$. ……………6 分

（2）设甲正面朝上次数大于乙为事件 A.

方法一：

设甲乙均抛掷 n 次时，两人正面朝上次数相等的概率为 p.

若此时甲正面朝上次数小于乙，则事件 A 不会发生；

若此时甲正面朝上次数等于乙，则甲第 $(n+1)$ 次抛掷结果为正面朝上才会有事件 A 发生；

若此时甲正面朝上次数大于乙，则无论甲第 $(n+1)$ 次抛掷结果如何，都有事件 A 发生，由对称性此时甲正面朝上次数大于乙和小于乙的概率相等，均为 $\frac{1}{2}(1-p)$.

所以 $P(A)=p\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p)\cdot1=\frac{1}{2}$. ……………12 分

方法二：

设甲正面朝上次数为 X，乙正面朝上次数为 Y.

因为 $A=$"$X>Y$"，所以 $\overline{A}$ 表示甲正面朝上次数不大于乙.

有 $\overline{A}=$"$X\le Y$"$=$"$X-1<Y$"$=$"$n+1-X>n-Y$".

此时 $\overline{A}$ 也表示甲反面朝上次数大于乙.

根据对称性，甲正面朝上次数大于乙的概率和甲反面朝上次数大于乙的概率相等.

故 $P(A)=P(\overline{A})$，由 $P(A)+P(\overline{A})=1$，得 $P(A)=\frac{1}{2}$. ……………12 分

21.（12 分）解：

（1）根据双曲线的对称性，双曲线 E 过点 $(\pm2\sqrt{2},2)$ 和 $(4,\pm2\sqrt{3})$.

所以 $\begin{cases}\frac{8}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{16}{a^2}-\frac{12}{b^2}=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=4\end{cases}$.

故双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. ……………4 分

（2）当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)+2$，

与双曲线方程联立，得 $(k^2-1)x^2-(8k^2-4k)x+16k^2-16k+8=0$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，有 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2-4k}{k^2-1}$， $x_1x_2=\dfrac{16k^2-16k+8}{k^2-1}$.

设 $P(t,t+1)$.

$k_1k_2=\dfrac{(y_1-t-1)(y_2-t-1)}{(x_1-t)(x_2-t)}=\dfrac{(kx_1-4k-t+1)(kx_2-4k-t+1)}{(x_1-t)(x_2-t)}$

$=\dfrac{k^2x_1x_2-k(4k+t-1)(x_1+x_2)+(4k+t-1)^2}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}=\dfrac{k^2(16k^2-16k+8)-k(4k+t-1)(8k^2-4k)+(4k+t-1)^2(k^2-1)}{16k^2-16k+8-t(8k^2-4k)+t^2(k^2-1)}$

$=\dfrac{(t^2+2t-11)k^2-8(t-1)k-(t-1)^2}{(t-4)^2k^2+4(t-4)k-(t^2-8)}$.

当 $t=4$ 时，不满足 k_1k_2 为定值.

当 $t\neq 4$ 时，若 k_1k_2 为定值，则 $\dfrac{t^2+2t-11}{(t-4)^2}=\dfrac{-8(t-1)}{4(t-4)}=\dfrac{-(t-1)^2}{-(t^2-8)}$，解得 $t=3$，此时 $k_1k_2=4$.

经检验，当直线 l 斜率不存在时，对 $P(3,4)$，也满足 $k_1k_2=4$.

所以点 P 坐标为 $(3,4)$. ……………12 分

22.（12 分）解：

（1）令 $f(x)=0$，得 $k=x^2\ln x$.

由 $k>0$ 得：$x>1$.

又函数 $y=x^2\ln x$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，且值域为 $(0,+\infty)$.

故对任意 $k>0$，在 $(1,+\infty)$ 上恒存在唯一 x_0，使得 $k=x_0^2\ln x_0$.

所以函数 $f(x)$ 恒有唯一零点. ……………4 分

（2）当 $k=\frac{e}{2}$ 时，$x_0=\sqrt{e}$，故 $0<k<\frac{e}{2}$ 时，$1<x_0<\sqrt{e}$.

由题意，要求存在 $t\in(0,x_0)$，使得 $f(x_0+t)+f(x_0-t)=0$.

令 $F(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)\ (0<t<x_0)$，下面证明 $F(t)$ 在 $t\in(0,x_0)$ 有零点：

$F'(t)=f'(x_0+t)-f'(x_0-t)$，

记 $G(t)=F'(t)$，$g(x)=f'(x)$.

$G(t)=g(x_0+t)-g(x_0-t)$，$G'(t)=g'(x_0+t)+g'(x_0-t)$.

$f'(x)=1+\ln x+\dfrac{k}{x^2}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2k}{x^3}=\dfrac{x^2-2k}{x^3}$.

当 $0<x<\sqrt{2k}$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>\sqrt{2k}$ 时，$g'(x)>0$.

由 $0<k<\frac{e}{2}$ 时，$1<x_0<\sqrt{e}$，$x_0^2-2k=x_0^2-2x_0^2\ln x_0=x_0^2(1-2\ln x_0)>0$.

故 $x_0>\sqrt{2k}$，当 $0<t<x_0-\sqrt{2k}$ 时，$x_0+t>x_0-t>\sqrt{2k}$.

有 $g'(x_0+t)>0$，$g'(x_0-t)>0$.

此时 $G'(t)>0$，有 $F'(t)$ 在 $(0,\ x_0-\sqrt{2k})$ 单调递增，

故 $0<t<x_0-\sqrt{2k}$ 时，$F'(t)>F'(0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$.

故 $F(t)$ 在 $(0,\ x_0-\sqrt{2k})$ 单调递增，$F(x_0-\sqrt{2k})>F(0)=2f(x_0)=0$.

又 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$，故 $t\to x_0$ 时，$F(t)\to-\infty$.

故 $F(t)$ 在 $t\in(x_0-\sqrt{2k},x_0)$ 有零点，即 $F(t)$ 在 $t\in(0,x_0)$ 有零点，问题得证. ……………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。