



南充市教育科学研究所学生成绩查询APP下载网址
查分网址: <http://www.sxw.cn/download>

秘密★启封并使用完毕前【考试时间：2023年3月14日下午15:00-17:00】

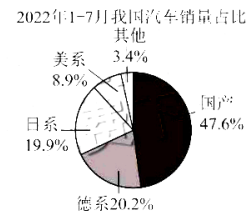
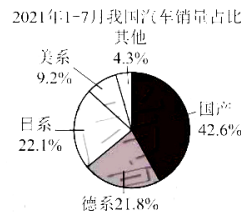
南充市高2023届高考适应性考试（二诊）

文科数学

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

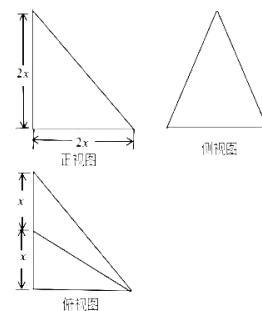
- 复数 z 满足: $(z-i)(1+3i)=10$, 则 $z =$ ()
A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$
- 已知集合 $A = \{x | -4 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $\{x | -4 < x \leq 3\}$ B. $\{x | -4 < x < -2\}$ C. $\{x | -2 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 < x \leq 3\}$
- 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边经过点 $P(-4, 3)$, 则 $\cos 2\alpha =$ ()
A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{24}{25}$

- 近年来国产品牌汽车发展迅速, 特别是借助新能源汽车发展的东风, 国产品牌汽车销量得到了较大的提升. 如图是2021年1-7月和2022年1-7月我国汽车销量占比饼状图, 已知2022年1-7月我国汽车总销量为1254万辆, 比2021年增加了99万辆, 则2022年1-7月我国汽车销量与2021年1-7月相比, 下列说法正确的是 ()



- 日系汽车销量占比变化最大
 - 德系汽车销量占比下降最大
 - 美系汽车销量变少了
 - 国产汽车销量占比变大了

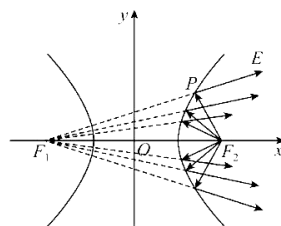
- 某三棱锥的三视图如图所示, 已知它的体积为 $\frac{32}{3}$, 则图中 x 的值为 ()



- 1
 - $\sqrt{2}$
 - 2
 - $2\sqrt{2}$
- 某高中准备选拔 x 名男生和 y 名女生去参加数学兴趣小组, 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x - y \geq 4 \\ 2y \geq x - 2 \\ x \leq 6 \end{cases}$, 则该数学兴趣小组最多

- 可以选拔学生 ()
- A. 8人 B. 10人 C. 12人 D. 14人

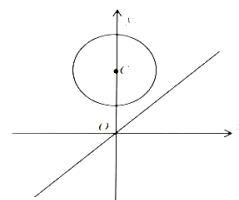
7. 智慧的人们在进行工业设计时，巧妙地利用了圆锥曲线的光学性质，比如电影放映机利用椭圆镜面反射出聚焦光线，探照灯利用抛物线镜面反射出平行光线. 如图，从双曲线右焦点 F_2 发出的光线通过双曲线镜面反射，且反射光线的反向延长线经过左焦点 F_1 . 已知入射光线 F_2P 斜率为 $-\sqrt{3}$ ，且 F_2P 和反射光线 PE 互相垂直（其中 P 为入射点），则双曲线的离心率为（ ）



- A. $1+\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$
 C. $2+\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1=1$ ， $a_{n+1}=3S_n (n \geq 1)$ ，则 S_{2023} 等于（ ）
- A. $\frac{4^{2022}-1}{3}$ B. $\frac{4^{2023}-1}{3}$ C. 4^{2022} D. 4^{2023}
9. 在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边，若 $b^2+c^2=2023a^2$ ，则 $\frac{2\sin B \sin C}{\tan A \cdot \sin A}$ 的值为（ ）
- A. 2021 B. 2022 C. 2023 D. 2024

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1， P 是空间中任意一点，则下列说法中错误的是（ ）
- A. 该正方体外接球的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$
 B. 若 M 是棱 C_1D_1 中点，则异面直线 AM 与 CC_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$
 C. 若点 P 在线段 AD_1 上运动，则始终有 $C_1P \perp CB_1$
 D. 若点 P 在线段 AD_1 上运动，则三棱锥 $D-BPC_1$ 体积为定值 $\frac{1}{6}$

11. 如图，已知点 P 是圆 $C: x^2+(y-3)^2=1$ 上的一个动点，点 Q 是直线 $x-y=0$ 上的一个动点， O 为坐标原点，则向量 \overrightarrow{OP} 在向量 \overrightarrow{OQ} 上的投影的最大值是（ ）



- A. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 3
 C. $2\sqrt{2}$ D. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$
12. 已知函数 $h(x) = (\frac{\ln x}{x})^2 - (1-2t)\frac{\ln x}{x} + 1-2t$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 ，且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则实数 $(1-\frac{\ln x_1}{x_1})\sqrt{(1-\frac{\ln x_2}{x_2}) \cdot (1-\frac{\ln x_3}{x_3})}$ 的值为（ ）
- A. $1-t$ B. $t-1$ C. -1 D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值为_____.

14. 已知直线 $y = \frac{3}{2}x - m$ 与曲线 $y = \frac{1}{2}x + \ln x$ 相切, 则 m 的值为_____.

15. 设 A, B 是抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的两个不同的点, O 为坐标原点, 若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 则直线 AB 恒过定点, 定点坐标为_____.

16. 设定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$. 若 $f(x) - g(4-x) = 2$, $g(x) = f(x-2) - 2$, 且 $f(x+2)$ 为奇函数, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023) =$ _____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分

17. 某大学“爱牙协会”为了解“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”情况之间的关系, 随机对 200 名青少年展开了调查, 得知这 200 个人中共有 120 个人“有蛀牙”, 其中“不爱吃甜食”且“有蛀牙”的有 30 人, “不爱吃甜食”且“无蛀牙”的有 50 人. 有 2×2 列联表:

| | 有蛀牙 | 无蛀牙 | 总计 |
|-------|-----|-----|----|
| 爱吃甜食 | | | |
| 不爱吃甜食 | | | |
| 总计 | | | |

(1) 根据已知条件完成如图所给的 2×2 列联表, 并判断是否有 99.5% 的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关;

(2) 若从“无蛀牙”的青少年中用分层抽样的方法随机抽取 8 人作进一步调查, 再从这抽取的 8 人中随机抽取 2 人去担任“爱牙宣传志愿者”, 求抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年的概率.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

| | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|
| $P(K^2 \geq k)$ | 0.05 | 0.01 | 0.005 |
| k | 3.841 | 6.635 | 7.879 |

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n . 从下面①②中选择其中一个作为条件解答试题, 若选择不同条件分别解答, 则按第一个解答计分.

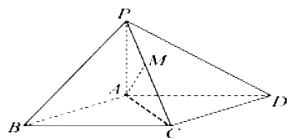
①数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $S_2 = 6$, 且 $4a_2, 2a_3, a_4$ 成等差数列;

②数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1 a_4 = 32$, $a_2 + a_3 = 12$.

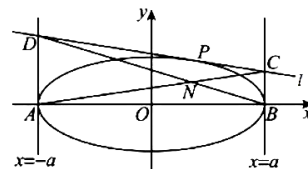
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n) \cdot (\log_2 a_{n-1})}$. 证明: $T_n < 1$.

19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 6 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, $PB = PD$, $PA \perp AC$.
- (1) 证明: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (2) 若 $PA = 3$, M 为棱 PC 上一点, 满足 $CM = \frac{2}{3}CP$, 求点 A 到平面 MBD 的距离.



20. 如图, 已知 A, B 分别为椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右顶点, $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 M 上异于点 A, B 的动点, 若 $AB = 4$, 且 ΔABP 面积的最大值为 2.
- (1) 求椭圆 M 的标准方程;
- (2) 已知直线 l 与椭圆 M 相切于点 $P(x_0, y_0)$, 且 l 与直线 $x = a$ 和 $x = -a$ 分别相交于 C, D 两点, 记四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 N .



问: 是否存在两个定点 F_1, F_2 , 使得 $|NF_1| + |NF_2|$ 为定值? 若存在, 求 F_1, F_2 的坐标; 若不存在, 说明理由.

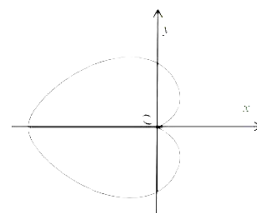
21. 已知函数 $f(x) = e^x - mx^2 (m \in R, x > 0)$, 其中 e 为自然对数的底数.

- (1) 当 $m = 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求函数 $g(x)$ 的极值;
- (2) 若函数 $h(x) = f'(x) - 2n \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点, 求证: $m^2 + n^2 > \frac{e}{4}$.

(二)、在选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 数学中有许多美丽的曲线, 如在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $E: x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$, ($a > 0$) 的形状如心形 (如图), 我们称这类曲线为笛卡尔心形曲线. 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 当 $a = 1$ 时.

- (1) 求曲线 E 的极坐标方程;
- (2) 已知 P, Q 为曲线 E 上异于 O 的两点, 且 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 求 $|PQ|$ 的最大值.



23. 已知 $m > 0, n > 0$, 函数 $f(x) = |x + m| + |x - n| + 1$ 的最小值为 3.

- (1) 求 $m + n$ 的值;
- (2) 求证: $n + \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2m} + \frac{2}{n} \right) \geq 4 - m$.

南充市高 2023 届高三适应性考试（二诊）

文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

| | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 选项 | B | A | C | D | C | D | A | C | B | B | D | D |

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡上。

13. $\sqrt{10}$ 14. 1 15. $(0,2)$ 16. 0

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答。第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答。

(一)必考题

17. 解：(1)由题意可得列联表如下：

| | 有蛀牙 | 无蛀牙 | 合计 |
|-------|-----|-----|-----|
| 爱吃甜食 | 90 | 30 | 120 |
| 不爱吃甜食 | 30 | 50 | 80 |
| 合计 | 120 | 80 | 200 |

.....3 分

所以 $K^2 = \frac{200(90 \times 50 - 30 \times 30)^2}{120 \times 80 \times 120 \times 80} = 28.125 > 7.879$,6 分

根据临界值表可知，有 99.5% 的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关。

(2). 设 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, a, b, c$ 分别代表抽取的 8 人，其中 a, b, c 代表“爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年， A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 “不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年，从 8 人选取 2 人的基本事件有： $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, a), (A_1, b), (A_1, c), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, A_5), (A_2, a), (A_2, b), (A_2, c), (A_3, A_4), (A_3, A_5), (A_3, a), (A_3, b), (A_3, c), (A_4, A_5), (A_4, a), (A_4, b), (A_4, c), (A_5, a), (A_5, b), (A_5, c), (a, b), (a, c), (b, c)$ 共有 28 个基本事件，其中抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年抽取有 $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, A_5), (A_3, A_4), (A_3, A_5), (A_4, A_5)$ 共有 10 种抽取方法，所以抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年的概率

$P = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$12 分

18.(1)解: 若选①: 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 设公比为 q .

$S_2 = 6$, 且 $4a_2, 2a_3, a_1$ 成等差数列.

所以 $\begin{cases} a_1 + a_1q = 6 \\ 4a_1q + a_1q^3 = 4a_1q^2 \end{cases}$,2分

解得 $a_1 = 2, q = 2$,4分

所以 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$;6分

若选②: 因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, $a_1a_4 = 32, a_2 + a_3 = 12$,

所以 $\begin{cases} a_1a_4 = a_2a_3 = 32 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases}$,2分

所以 $a_2 = 4, a_3 = 8, q = \frac{a_3}{a_2} = 2$,4分

所以 $a_n = a_2q^{n-2} = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$;6分

(2)证明: 由(1)知 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+1})} = \frac{1}{(\log_2 2^n)(\log_2 2^{n+1})} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

所以 $T_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$,10分

因为 $\frac{1}{n+1} > 0$,

所以 $1 - \frac{1}{n+1} < 1$,11分

即 $T_n < 1$12分

19. 解: (1) 证明: 连接 BD 交 AC 于 O , 连接 PO .

因为底面 $ABCD$ 是边长为 3 的菱形, 所以 $BD \perp AC$,

因为 O 是 BD 中点, $PB = PD$, 所以 $BD \perp PO$.

因为 $AC \cap PO = O, AC, PO \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp$ 平面 PAC ,6分

(2) 如图, 连接 BM, MD , 连接 MO .

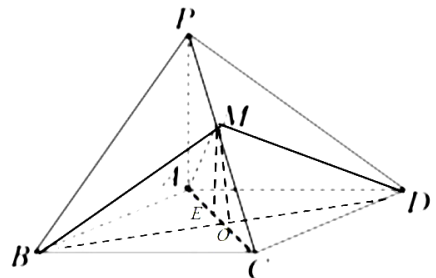
由 $BD \perp$ 平面 PAC , 则 $BD \perp PA$

因为 $PA \perp AC$, 所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$

由 $ABCD$ 是边长为 6 的菱形, $\angle ABC = 60^\circ, AC = 6$ 则 $BD = 6\sqrt{3}$

过 M 作 $ME \perp AC = E$, 因为 $PA = 3$, 且 $\vec{CM} = \frac{2}{3}\vec{CP}$,

则 $ME = 2, EO = 1$, 由 $ME \perp AC = E$, 故 $MO = \sqrt{5}$.



则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{15}$ 9 分

令点 A 到平面 ABD 的距离为 h

由 $V_{A-ABD} = V_{M-ABD}$

所以 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot ME$, 即 $\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{15} \cdot h = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2$

故 $h = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, 点 A 到平面 ABD 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 12 分

20. (1) 解: 由题知 $\begin{cases} AB = 2a = 4 \\ [S_{\triangle FAB}]_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = 2 \end{cases}$, 2 分

得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ 3 分

故椭圆 M 的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 方法一: 因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上,

所以 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, ($y_0 \neq 0$).

设切线 l 方程为: $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $y = kx + y_0 - kx_0$.

令 $m = y_0 - kx_0$, 则 $y = kx + m$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 得 $x^2 + 4(kx + m)^2 - 4 = 0$.

$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0$

因为直线 l 与椭圆 M 相切,

所以 $\Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 1) \cdot (4m^2 - 4) = 0$.

所以 $4k^2 + 1 = m^2$ 7 分

代入 $m = y_0 - kx_0$, 得 $4k^2 + 1 = (y_0 - kx_0)^2$, 即 $(4 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0 \cdot k + 1 - y_0^2 = 0$.

因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 所以 $4 - x_0^2 = 4y_0^2$, $1 - y_0^2 = \frac{x_0^2}{4}$.

所以 $4y_0^2k^2 + 2x_0y_0 \cdot k + \frac{x_0^2}{4} = 0$, 有 $(2y_0k + \frac{x_0}{2})^2 = 0$.

由于 $y_0 \neq 0$, 所以 $k = -\frac{x_0}{4y_0}$.

故切线 l 方程为: $y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$, 即 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$ 9 分

令 $x = -2$ 得 $D(-2, \frac{1 + \frac{x_0}{2}}{y_0})$, 则直线 BD 为: $y = \frac{1 + \frac{x_0}{2}}{-4y_0}(x - 2)$ ①

令 $x=2$, 得 $C(2, \frac{1-x_0}{y_0})$, 则直线 AC 为: $y = \frac{1-x_0}{4y_0}(x+2)$. ②

由①×②知: $y^2 = \frac{1-x_0^2}{-16y_0^2}(x^2-4) = \frac{1}{-16}(x^2-4)$

点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, (y \neq 0)$11 分
由椭圆定义知:

存在定点 $F_1(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0), F_2(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0)$, 使得 $|NF_1| + |NF_2|$ 为定值 4.12 分

方法二: 因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上,

则 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 即 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$.

又因为 $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$, 由于 $y \neq 0$, 不妨设 $y > 0$.

取 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$,

所以 $y' = \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$,

所以切线的斜率 $k = \frac{-x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}$,

所以切线 l 方程为 $y - y_0 = \frac{-x_0}{2\sqrt{4-x_0^2}}(x - x_0)$,7 分

由 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$, 可得 $4 - x_0^2 = 4y_0^2$, 已知 $y_0 > 0$, 得 $\sqrt{4-x_0^2} = 2y_0$

所以切线 l 方程为: $y - y_0 = \frac{-x_0}{4y_0}(x - x_0)$, 即 $\frac{x_0x}{4} + y_0y = 1$9 分

令 $x=-2$ 得 $D(-2, \frac{1+x_0}{y_0})$, 则直线 BD 为: $y = \frac{1+x_0}{-4y_0}(x-2)$. ①

令 $x=2$, 得 $C(2, \frac{1-x_0}{y_0})$, 则直线 AC 为: $y = \frac{1-x_0}{4y_0}(x+2)$. ②

由①×②知: $y^2 = \frac{1-x_0^2}{-16y_0^2}(x^2-4) = \frac{1}{-16}(x^2-4)$

由对称性知: 点 N 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, (y \neq 0)$11 分
由椭圆定义知:

存在定点 $F_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$, 使得 $|NF_1|+|NF_2|$ 为定值 4.12 分

说明: 未经证明, 直接写出椭圆切线方程 $\frac{x_0x}{4}+y_0y=1$, 扣 4 分.

20. 解: (1) 当 $m=0$ 时, $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ 2 分

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减; 3 分

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. 4 分

所以 $g(x)_{\text{极小值}} = g(1) = e$, 无极大值. 5 分

(2) 方法一: $h(x) = f'(x) - 2n \sin x = e^x - 2mx - 2n \sin x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点,

得 $mx + n \sin x - \frac{e^x}{2} = 0$, 此方程可以看作 mOn 坐标平面的直线 l 的方程.

则直线 l 上的任意一点 (m, n) 到原点的距离满足不等式:

$$\sqrt{m^2 + n^2} \geq \frac{e^x}{2\sqrt{x^2 + \sin^2 x}}$$

则 $m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)}$ 8 分

先证: $x^2 - \sin^2 x = (x + \sin x) \cdot (x - \sin x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$.

构造函数 $p(x) = x + \sin x$, $x \in (0, +\infty)$. 则 $p'(x) = 1 + \cos x \geq 0$.

$p(x) = x + \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$x > 0$, 得 $p(x) = x + \sin x > p(0) = 0$.

即当 $x > 0$ 时 $x + \sin x > 0$.

同理: 构造函数 $q(x) = x - \sin x$, $x \in (0, +\infty)$. 则 $q'(x) = 1 - \cos x \geq 0$.

$q(x) = x - \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$x > 0$, 得 $q(x) = x - \sin x > q(0) = 0$.

即当 $x > 0$ 时 $x - \sin x > 0$.

所以 $x^2 - \sin^2 x = (x + \sin x) \cdot (x - \sin x) > 0$ 10 分

$$m^2 + n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2 + \sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2 + x^2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 > \frac{e^2}{8} > \frac{2e}{8} = \frac{e}{4}$$

所以 $m^2 + n^2 > \frac{e}{4}$ 证毕. 12 分

方法二: $h(x) = f'(x) - 2n \sin x = e^x - 2mx - 2n \sin x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 有零点,

得 $mx + n \sin x - \frac{e^x}{2} = 0$, 则由柯西不等式知: $\frac{e^x}{2} = mx + n \sin x \leq \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \sqrt{x^2 + \sin^2 x}$

$$\sqrt{m^2+n^2} \geq \frac{e^x}{2\sqrt{x^2+\sin^2 x}}, \text{ 则}$$

$$m^2+n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

先证: $x^2 - \sin^2 x > 0, x \in (0, +\infty)$.

构造函数 $h(x) = x^2 - \sin^2 x, x \in (0, +\infty)$, 则 $h'(x) = 2x - 2\sin x \cos x = 2x - \sin 2x$.

构造函数 $k(t) = t - \sin t, t \in (0, +\infty)$, 则 $k'(t) = 1 - \cos t \geq 0$.

$k(t) = t - \sin t$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

$2x > 0$, 得 $k(2x) > k(0) = 0$.

所以函数 $h(x) = x^2 - \sin^2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

当 $x > 0$ 时, $x^2 - \sin^2 x > 0 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

由 (1) 知 $\frac{e^x}{x} \geq e$.

$$m^2+n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2+x^2)} = \frac{1}{8} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 > \frac{e^2}{8} > \frac{2e}{8} = \frac{e}{4}$$

所以 $m^2+n^2 > \frac{e}{4}$ 证毕. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$\text{另: } m^2+n^2 \geq \frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2+|x|\cdot|\sin x|)} > \frac{e^{2x}}{4(x^2+|x|)} > \frac{1}{4} \left(\frac{e^x}{x}\right) \cdot \frac{e^x}{x+1} > \frac{1}{4} \cdot e \cdot e = \frac{e}{2}$$

阅卷说明:

考生如按以下方法, 请酌情给分.

① 当 $x > 0$ 时, $x^2 - \sin^2 x > 0$, 得 $|x| > |\sin x|$; ② 当 $x > 0$ 时, $e^x > x+1 > 1$, 得 $\frac{e^x}{x+1} > 1$.

22. 解: (1) 将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入曲线 E .

$$\text{得 } \rho^2 = \rho - \rho \cos \theta, \rho \geq 0 \text{ 即 } \rho = 1 - \cos \theta.$$

所以 E 的极坐标方程为 $\rho = 1 - \cos \theta \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 不妨设 $P(\rho_1, \theta), Q\left(\rho_2, \theta + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\text{即 } \rho_1 = 1 - \cos \theta, \rho_2 = 1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \theta,$$

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta)^2} = \sqrt{3 + 2(\sin \theta - \cos \theta)} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

因为 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1]$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

所以 $|PQ| \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当且仅当 $\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in Z$.

所以 $|PQ|$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$10分

23. 解: (1) 因为 $f(x)=|x+m|+|(x-n)|+1\geq|(x+m)-(x-n)|+1=|m+n|+1$,

当且仅当 $(x+m)\cdot(x-n)\leq 0$ 时, 即 $x\in[-m,n]$ 时, 即等号成立.

又 $m>0, n>0$, 所以 $[f(x)]_{\min}=m+n+1=3$.

故 $m+n=2$ 5分

(2) 由(1)知 $m+n=2$, 又 $m>0, n>0$.

所以 $\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}=(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n})\cdot(m+n)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+2+\frac{n}{2m}+\frac{2m}{n})\geq\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2}+2\sqrt{1})=\frac{9}{4}$.

当且仅当 $\begin{cases} \frac{2m}{n}=\frac{n}{2m} \\ m+n=2 \end{cases}$, 即 $m=\frac{2}{3}, n=\frac{4}{3}$ 时, 等号成立.

因为 $\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\geq\frac{9}{4}$,8分

所以 $\log_3\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 2$.

则 $m+n+\log_3\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4$

即 $n+\log_3\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4-m$ 10分