

百校联考2020年高考考前冲刺必刷卷(一)

理科数学

参考答案

本试卷防伪处为:

图象上存在关于 y 轴对称的点

若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在两个极值点 x_1, x_2 .

1. B 【解析】 $B = \{x | \log_2(x+1) > 1\} = \{x | x > 1\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 4\}$.

2. D 【解析】选项 A 中函数是奇函数, 选项 B 中函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 选项 C 中函数在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 选项 D 中函数是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

3. D 【解析】由题意得 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ \lg(x-2) \neq 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases}$, 故所求函数的定义域为 $(2, 3) \cup (3, 4]$.

4. A 【解析】令 $f(x) = e^x - (x+1)$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = e^x - 1 > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 所以 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $e^x > x+1$, 所以 p 为真命题; 当 $x_0 = 1$ 时, $\ln x_0 = x_0 - 1$, 故 q 为真命题. 所以 $p \wedge q$ 为真命题.

5. C 【解析】若 A 中只有一个元素, 则只有一个实数满足 $x^2 + 2ax + 2a \leq 0$, 即抛物线 $y = x^2 + 2ax + 2a$ 与 x 轴只有一个交点, $\therefore \Delta = 4a^2 - 8a = 0$. $\therefore a = 0$ 或 2 .

6. A 【解析】由 $f(x)$ 的解析式知只有两个零点 $x = -2$ 与 $x = 0$, 排除 B、D; 又 $f'(x) = (2x^2 + 6x + 2)e^{2x}$, 由 $f'(x) = 0$ 根的情况知函数有两个极值点, 排除 C.

7. C 【解析】 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - x = \log_2(4^x + 1) - \log_2 2^x = \log_2 \frac{4^x + 1}{2^x}$, 令 $t = \frac{4^x + 1}{2^x}$ 则 $t = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$, 所以 $\log_2 \frac{4^x + 1}{2^x} \geq \log_2 2 = 1$, 即函数 $f(x)$ 的最小值为 1.

8. D 【解析】构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $a = \frac{2}{e^2} = f(e^2)$, $b = \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 4}{4} = f(4)$, $c = \frac{\ln 3}{3} = f(3)$, 由 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 知函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在

$(e, +\infty)$ 上单调递减, 又因为 $e < 3 < 4 < e^2$, 所以 $a < b < c$.

9. A 【解析】 p : 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - \ln x$ 存在极值, 对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = -\frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$. 因为 $f(x)$ 存在极值, 所以 $f'(x) = -\frac{x^2 - 2ax + 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 即方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 即 $\Delta = 4a^2 - 4 \geq 0$, 显然当 $\Delta = 0$ 时, $f(x)$ 无极值, 不合题意, 所以方程 $x^2 - 2ax + 1 = 0$ 必有两个不等正根, 所以 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 4 > 0 \end{cases}$, 解得 $a > 1$. 函数 $g(x) = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $a > 1$. 故 p 是 q 的充要条件.

10. C 【解析】 $f(x) = x(ax + 1 - e^x)$. 令 $g(x) = ax - e^x + 1$, 则 $g'(x) = a - e^x$. 若 $a \leq 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 为减函数, 而 $g(0) = 0$, 从而当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq 0$. 若 $a > 1$, 则当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 为增函数, 而 $g(0) = 0$, 从而当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f(x) > 0$, 不合题意. 综上可得, a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

11. C 【解析】当 $x > 2$ 时, $x \cdot f'(x) + f(x) > 2f'(x)$, $\therefore (x-2)f'(x) + f(x) > 0$. 令 $F(x) = |x-2|f(x)$, 当 $x > 2$ 时, 则 $F(x) = (x-2)f(x)$, $F'(x) = (x-2)f'(x) + f(x) > 0$, 即当 $x > 2$ 时, $F(x)$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x) = f(2-x)$, 所以 $F(2+x) = F(2-x)$, 即 $F(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称, 不等式 $f(x) < \frac{1}{|x-2|}$ 等价于 $|x-2|f(x) < 1$ ($x \neq 2$), $F(1) = |1-2|f(1) = f(1) = 1$, 即 $F(x) < F(1)$, 所以 $|x-2| < |1-2|$, 解得 $1 < x < 3$ 且 $x \neq 2$, 解集为 $(1, 2) \cup (2, 3)$.

12. D 【解析】由 $f(x)$ 关于 y 轴对称的函数为 $h(x) = f(-x) = \frac{1 - e^{-x+1}}{e^{-x+1} + 1} = e^{x-1} - 1$ ($x > 0$),

令 $h(x) = g(x)$, 得 $e^{x-1} - 1 = e^x \ln(x+1) - ae^x$,
($x > 0$),

则方程 $e^{x-1} - 1 = e^x \ln(x+1) - ae^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解,

即方程 $\frac{1}{e} + \ln(x+1) - \frac{1}{e} = a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解

设 $\varphi(x) = \frac{1}{e^x} + \ln(x+1) - \frac{1}{e}$,

条件转化为 $y = \varphi(x)$ 与 $y = a$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有交点,

$\because \varphi'(x) = -\frac{1}{e^x} + \frac{1}{x+1} = \frac{e^x - x - 1}{e^x(x+1)} > 0$,

得 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

当 $x > 0$ 时, 则 $\varphi(x) > \varphi(0) = 1 - \frac{1}{e}$

所以 $a > 1 - \frac{1}{e}$.

13.5 【解析】 $a - 2 = 3$, 解得 $a = 5$; 当 $a = 3$ 时, $a - 2 = 1$, 不满足互异性, 舍去.

14. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ 【解析】当命题 p 为真命题, 即方程 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解,

由 $a^2x^2 + ax - 2 = 0$, 得 $(ax+2)(ax-1) = 0$, 显然

$a \neq 0, \therefore x = -\frac{2}{a}$ 或 $x = \frac{1}{a}, \therefore x \in [-1, 1]$, 故 $|\frac{2}{a}|$

≤ 1 或 $|\frac{1}{a}| \leq 1, \therefore |a| \geq 1$, 即实数 a 的取值范围

为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

15. $(-1, 1)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, $\because x > 0$ 时, $-x < 0, f(-x) = -e^{x-1} - 2x = f(x), x < 0$ 同理: $f(-x) = f(x), \therefore f(x)$ 为偶函数, 易知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 且 $f(1) = -e^0 - 2 = -3, f(x) + 3 > 0$ 即 $f(x) > -3$, 即 $f(x) > f(1)$, 根据偶函数的性质知当 $|x| < 1$ 时, 得 $-1 < x < 1$.

16.2 【解析】 $(3\ln x - x^2 - a)^2 + (x - a)^2$ 就是曲线 $y = 3\ln x - x^2 (x > 0)$ 上点 $A(x, 3\ln x - x^2)$ 与直线 $y = x$ 上点 $B(a, a)$ 之间的距离 $|AB|$ 的平方, 对曲线 $y = 3\ln x - x^2$ 求导: $y' = \frac{3}{x} - 2x$, 与直线 $y = x$

平行的切线斜率 $k = 1 = \frac{3}{x} - 2x$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{3}{2}$ (舍去), 把 $x = 1$ 代入 $y = 3\ln x - x^2$, 解得 $y = -1$, 即切点 $(1, -1)$, 则切点 $(1, -1)$ 到直线 $y = x$

的距离为 $d = \frac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $d^2 = 2$, 即 $|AB|$ 的

平方最小值为 2. 即 $(3\ln x - x^2 - a)^2 + (x - a)^2$ 的

平方最小值为 2. 即 $(3\ln x - x^2 - a)^2 + (x - a)^2$ 的

最小值为 2.

17. 【解析】(I) 当 $m = 1$ 时, $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\} = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 1 分

$B = \{x | y = \sqrt{(\frac{1}{9} - 3^x)(3^x - 81)}\} = \{x | \frac{1}{9} \leq 3^x \leq 81\} = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 3 分

所以 $A \cup B = \{x | -2 \leq x \leq 4\}$, 4 分

(II) 集合 $A = \{x | x^2 - (m+2)x + (1-m)(2m+1) \leq 0\} = \{x | (x+m-1)(x-2m-1) \leq 0\}$

若 $m \geq 0$, 则 $A = \{x | 1-m \leq x \leq 2m+1\}$, ... 5 分

$\because B \subseteq A, \therefore \begin{cases} 1-m \leq -2 \\ 2m+1 \geq 4 \end{cases}$, 解得 $m \geq 3$, 7 分

若 $m < 0$, 则 $A = \{x | 2m+1 \leq x \leq 1-m\}$.

$\because B \subseteq A, \therefore \begin{cases} 2m+1 \leq -2 \\ 1-m \geq 4 \end{cases}$, 解得 $m \leq -3$, ... 9 分

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, 10 分

18. 【解析】(I) 当命题 q 为真命题时,

函数 $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调

递减,

所以 $g'(x) = -x^2 + 2x + a \leq 0$ 在 $[3, +\infty)$ 上恒成立, 2 分

$g'(x) = -x^2 + 2x + a = -(x-1)^2 + 1 + a$

所以 $g'(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g'(3) \leq 0$,

解得 $a \leq 3$,

所以 q 是真命题, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

..... 4 分

(II) 命题 p 为真命题时, 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x} + 1)$ 在

$[-2, -1]$ 上单调递增, $\therefore 0 < a < 1$, 6 分

因为 p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题, 所以 p 与 q 的真值相反, 7 分

(i) 当 p 真且 q 假时, 有 $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ a > 3 \end{cases}$,

此不等式无解. 9 分

(ii) 当 p 假且 q 真时, 有 $\begin{cases} a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 1 \\ a \leq 3 \end{cases}$,

解得 $a \leq 0$ 或 $1 \leq a \leq 3$, 11 分

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0] \cup [1, 3]$.

..... 12 分

19. 【解析】(I) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 3x + 8)$,

此时函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$;

因为函数 $y = 2x^2 - 3x + 8$ 的最小值为 $\frac{4 \times 2 \times 8 - 3^2}{8} = \frac{55}{8}$.

最大值为 $2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 8 = 10$, 故函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的值域为 $[\log_{\frac{1}{2}} 10, \log_{\frac{1}{2}} \frac{55}{8}]$; 6分

(II) 因为函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g(x) = 2mx^2 - 3x + 8m$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递

$$\begin{cases} m > 0, \\ \frac{3}{4m} \leq 4, \\ g(4) \geq 0, \end{cases}$$

解得 $m \geq \frac{3}{10}$, 综上所述, 实数 m 的取值范围 $[\frac{3}{10}, +\infty)$ 12分

20. 【解析】(I) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x) + f(-x) = 0$ 恒成立, 则 $2(a+b)x^2 = 0$.

所以 $b = -a$, 所以 $f(x) = ax^3 - 12ax$, 1分

则 $f'(x) = 3ax^2 - 12a = 3a(x+2)(x-2)$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 2$.

当 $x \in (-2, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

$f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)$, 3分

由 $f(2) = 8a - 24a = -16a = -16$, 解得 $a = 1$.

所以 $a = 1, b = -1$, 5分

(II) 由 (I) 可知 $f(x) = x^3 - 12x$,

设点 $P(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $f(x) = x^3 - 12x$ 的切点, 则在 P 点处的切线的方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 即 $y = 3(x_0^2 - 4)x - 2x_0^3$

因为其过点 $M(1, m)$, 所以 $m = 3(x_0^2 - 4) - 2x_0^3 = -2x_0^3 + 3x_0^2 - 12$, 7分

由于有三条切线, 所以方程应有 3 个实根,

设 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + m + 12$, 只要使曲线 $g(x)$ 有 3 个零点即可, 8分

设 $g'(x) = 6x^2 - 6x = 0$, $\therefore x = 0$ 或 $x = 1$ 分别为 $g(x)$ 的极值点,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x \in (0, 1)$ 时 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以, $x = 0$ 为极大值点, $x = 1$ 为极小值点.

..... 9分

所以要使曲线 $g(x)$ 与 x 轴有 3 个交点, 当且仅当

$$\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} m + 12 > 0 \\ m + 11 < 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

解得 $-12 < m < -11$.

即实数 m 的取值范围为 $(-12, -11)$ 12分

21. 【解析】(I) 因为 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}ax + (1-x)e^x$,

$$\text{得 } f'(x) = ax - \frac{1}{2}a - e^x + (1-x)e^x = ax - \frac{1}{2}a - xe^x, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{所以 } f'(0) = -\frac{1}{2}a.$$

因为曲线在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x + 1$,

$$\text{所以 } f'(0) = -\frac{1}{2}a = 1, \text{即 } a = -2. \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$(II) f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{2}ax + (1-x)e^x = \frac{1}{2}ax(x-1) + (1-x)e^x = (x-1)(\frac{1}{2}ax - e^x),$$

所以 $f(x)$ 有一个零点 $x = 1$ 6分

要使得 $f(x)$ 有 3 个零点, 即方程 $\frac{1}{2}ax - e^x = 0$ 有 2 个不为 1 的不等实数根,

$$\text{又方程 } \frac{1}{2}ax - e^x = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2e^x}{x} (x \neq 0), \text{令 } h(x) = \frac{2e^x}{x} (x \neq 0), \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

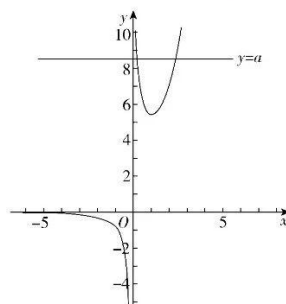
即函数 $y = a$ 与 $y = h(x)$ 图象有两个交点,

$$\text{令 } h'(x) = \frac{2xe^x - 2e^x}{x^2} = \frac{2e^x(x-1)}{x^2} = 0, \text{得 } x = 1.$$

..... 8分

$h(x)$ 的单调性如表:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$



..... 9分

当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$, 又 $h(1) = 2e$, 可作出 $h(x)$ 的大致图象, 由图象得 $a > 2e$ 11 分

所以, 要使得 $f(x)$ 有 3 个零点,
则实数 a 的取值范围为 $(2e, +\infty)$ 12 分

22. 【解析】(I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
因为 $f(x) = x \ln x - \frac{k}{x} - x$,
 $f'(x) = \ln x + 1 + \frac{k}{x^2} - 1 = \ln x + \frac{k}{x^2}$
令 $g(x) = \ln x + \frac{k}{x^2}$
所以 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2k}{x^3} = \frac{x^2 - 2k}{x^3}$, $x > 0$ 1 分

当 $k \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$,
所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

即 $f'(x) = \ln x + \frac{k}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至多一个零点, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上至多一个极值点, 不满足条件.

当 $k > 0$ 时, 由 $g'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{2k}$ (负根舍去),
当 $x \in (0, \sqrt{2k})$ 时, $g'(x) < 0$,
当 $x \in (\sqrt{2k}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,
所以函数 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{2k})$ 上单调递减;
在 $(\sqrt{2k}, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

所以 $g(x)_{\min} = g(\sqrt{2k}) = \ln \sqrt{2k} + \frac{1}{2}$,
要使函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在两个极值点
则函数 $f'(x)$ 有两个零点, 即 $g(x)$ 有两个零点
首先 $g(x)_{\min} = \ln \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < 0$, 解得 $0 < k < \frac{1}{2e}$.
..... 5 分

因为 $2k < \sqrt{2k} < 1$, 且 $g(1) = k > 0$,
下面证明: $g(2k) = \ln(2k) + \frac{1}{4k} > 0$.
设 $h(k) = \ln(2k) + \frac{1}{4k}$,
则 $h'(k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{4k^2} = \frac{4k-1}{4k^2}$.

因为 $k < \frac{1}{2e}$, 所以 $h'(k) = \frac{4k-1}{4k^2} < \frac{\frac{1}{2e}-1}{4k^2} < 0$.
所以 $h(k)$ 在 $(0, \frac{1}{2e})$ 上单调递减,
所以 $g(2k) = h(k) > h(\frac{1}{2e}) = \ln \frac{1}{e} + \frac{e}{2} > 0$.
所以实数 k 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2e})$ 6 分

(II) 因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点,
所以 x_1, x_2 是函数 $f'(x)$ 的两个零点
即 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点,
不妨设 $x_1 < x_2$, 令 $x_2 = tx_1$, 则 $t > 1$.
所以 $\begin{cases} \ln x_1 + \frac{k}{x_1^2} = 0, \\ \ln x_2 + \frac{k}{x_2^2} = 0, \end{cases}$ 即 $\ln x_2 - \ln x_1 = \frac{k}{x_1^2} - \frac{k}{x_2^2}$ 8 分

所以 $\ln t = \frac{k}{x_1^2} - \frac{k}{t^2 x_1^2}$, 即 $x_1^2 = \frac{k}{\ln t} (1 - \frac{1}{t^2})$, $0 < k < \frac{1}{2e}$, $t > 1$.
要证 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{2k}$, 需证 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2k}$ 9 分

即证 $tx_1^2 > 2k$, 即证 $t \times \frac{k}{\ln t} (1 - \frac{1}{t^2}) > 2k$.
因为 $0 < k < \frac{1}{2e}$, 所以即证 $t - \frac{1}{t} > 2 \ln t (t > 1)$ 10 分

设 $H(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t}$,
则 $H'(t) = \frac{2}{t} - 1 - \frac{1}{t^2} = -\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0$, $t > 1$.
所以 $H(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 11 分

所以 $H(t) = 2 \ln t - t + \frac{1}{t} < H(1) = 0$.
所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{2k}$ 12 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注