

天一大联考

“顶尖计划”2023 届高中毕业班第四次考试

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{3+i}{1+2i} + 2i =$
A. $1-i$ B. $1+i$ C. $5-i$ D. $5+i$
2. 已知集合 A 为英文单词“book”的字母组成的集合，集合 B 为英文单词“bike”的字母组成的集合，则集合 $A \cap B$ 的子集个数为
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 《工程做法则例》是清朝雍正时期官方发布的一部较为系统全面的建筑工程专书，里面有一句话：“凡檐柱（支撑屋檐的柱子）以面阔十分之八定高，以百分之七定径寸（直径）。”这句话规定了房屋檐柱的高、直径与房屋宽度之间的比例。假设某座房子的“面阔”为 4 m，檐柱形状为圆柱，根据书中这句话的要求，这座房子的一根檐柱的体积为
A. $0.062\ 72\pi\ \text{m}^3$ B. $0.627\ 2\pi\ \text{m}^3$
C. $0.031\ 36\pi\ \text{m}^3$ D. $0.313\ 6\pi\ \text{m}^3$
4. 已知圆 $C_1: x^2 - 2x + y^2 = 0$ 与圆 C_2 关于直线 $x + y = 0$ 对称，则 C_1, C_2 的公共弦长为
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
5. 今年 3 月 5 日“学雷锋”日，某班组织同学参加社会实践活动，要从 3 名女生和 2 名男生中，抽取 2 人到“夕阳红”敬老院帮助老人，则恰好抽到 2 名女生的概率为
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$
6. 已知变量 x 与 y 的一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_6, y_6)$ 满足 $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = e^{24.6}$, $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 = e^{18.3}$ ，对各样本数据求对数，再利用线性回归分析的方法得 $\ln y = 1 + b \ln x$ ，则实数 $b =$
A. -2 B. -0.5 C. 0.5 D. 2

7. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P, Q 绕坐标原点按逆时针方向同时开始做匀速圆周运动, 点 P 从点 $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ 出发, 角速度为 $\frac{\pi}{3}$ rad/s, 点 Q 从点 $(\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10})$ 出发, 角速度为 $\frac{\pi}{6}$ rad/s, 以射线 OP 与 OQ 为终边的角分别设为 α 与 β , 则 3 s 后, $\cos(\alpha - \beta) =$

- A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

8. 已知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 的右支上, 点 Q 在直线 $l: x = -\frac{c^2 + a^2}{c}$ 上, 若 $\overrightarrow{F_1F_2} = \overrightarrow{QP}$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围是

- A. $(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}]$ B. $[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$
C. $(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ D. $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

9. 将函数 $y = \sin x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$, 得到函数 $y = f(x)$ 的图象, 若 $f(x)$ 在区间 $[t, t + \frac{\pi}{6}]$ 上的最大值为 M , 最小值为 N , 则 $M - N$ 的最小值为

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

10. 设 $a = 1.1^{1.1}, b = e^{0.1}, c = 1 + 1.1 \ln 1.1$, 则

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $a < c < b$

11. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 $6\pi, AA_1 = 2$, 底面 $ABCD$ 为正方形, P 是线段 BC_1 上的一个动点, 则 $DP + PC$ 的最小值为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\sqrt{10}$

12. 已知曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(x_0, \sqrt{x_0}) (0 < x_0 < \frac{1}{4})$ 处的切线也与曲线 $y = e^x$ 相切, 则 x_0 所在的区间是

- A. $(0, \frac{1}{4e^4})$ B. $(\frac{1}{4e^4}, \frac{1}{4e^2})$ C. $(\frac{1}{4e^2}, \frac{1}{4e})$ D. $(\frac{1}{4e}, \frac{1}{4})$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 3x + 2y \leq 12, \\ x + 2y \leq 8, \\ x + y \geq 4, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值为 _____.

14. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}, |a| = 2, e$ 是与 a 方向相同的单位向量, 且 $b^2 - 4e \cdot b = 3$, 则

$|a - b| =$ _____.

15. 已知不经过坐标原点 O 的直线 l 与抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆经过点 O , 若当直线 l 变化时, 点 $P(1, \sqrt{2}p)$ 到直线 l 的最大距离为 $\sqrt{7}$, 则 E 的准线方程为 _____.
16. 已知在 $\triangle ABC$ 的 AC 边上有一点 D , $BD = AC$, 且 $AD = 2DC$, 则 $\cos \angle ABC$ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60

17. (12 分)

某条街上有一 A, B 两个生意火爆的早餐店, A 店主卖胡辣汤、油条等, B 店主卖煎饼果子、豆浆等. 小明为了了解附近群众的早餐饮食习惯与年龄的关系, 随机调查了 200 名到这两家店就餐的顾客, 统计数据如下:

	A 店	B 店
年龄 50 岁及以上	40	60
年龄 50 岁以下	10	90

- (I) 分别估计附近群众中 50 岁及以上的人到 A 店和到 B 店就餐的概率;
 (II) 判断是否有 99% 的把握认为附近群众的早餐饮食习惯与年龄有关;
 (III) 若 A 店的顾客平均消费为 8 元, B 店的顾客平均消费为 10 元, 估计这 200 人的平均消费.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

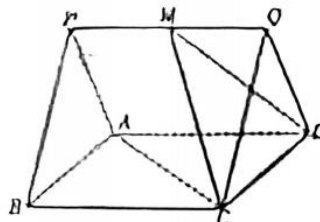
18. (12 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = ka_n + n - 1$, 且数列 $\{a_n + n\}$ 为等比数列.

- (I) 求实数 k 的值;
 (II) 求数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (12分)

在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle DAB = 120^\circ$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $QCD \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $\triangle PAB, \triangle QCD$ 均为等边三角形, M 为线段 PQ 的中点.



(I) 证明: $AC \perp DM$;

(II) 求多面体 $PM-ABCD$ 的体积.

20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 D 是 C 上一个动点,

$\triangle DF_1F_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$, $|DF_2|$ 的最小值为 1.

(I) 求 C 的方程;

(II) 设 C 的左顶点为 A , 直线 $l: x = -6$ 与 x 轴交于点 P , 过 P 作直线交 C 于 G, H 两点, 直线 AG, AH 分别与 l 交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 证明: 直线 AN 与 OM 的斜率之积为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax + a)$ 的极大值点为 $x = -2$.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 若 $f(x)$ 的最小值为 0, 不等式 $f(x) \geq mx^2 + mx \ln x + x$ 恒成立, 求实数 m 的取值集合.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点为极点, x

轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 = 6\rho \cos \theta - 8$.

(I) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(II) 若 P 和 Q 分别是 C_1 和 C_2 上的一点, 求 $|PQ|$ 的最小值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知正实数 a, b 满足 $(a+1)^3 + (b+1)^3 = 16$, 设 $a+b$ 的最大值为 m .

(I) 求 m 的值;

(II) 若 $|2x - a| \leq m, |2y - a| \leq m$, 求证: $|2x - 4y + a| \leq 6$.

19. 解析 (I) 如图, 连接 BD , 与 AC 交于点 O , 取 AB 的中点 G , 连接 PG, MO , 则 $PG \perp AB$.

又平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, 所以 $PG \perp$ 平面 $ABCD$. (2分)

设 H 为 CD 的中点, 连接 QH, GH , 则 GH 过点 O , 且 O 是 GH 的中点.

同理可证 $QH \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $PG = QH$, 所以四边形 $PGHQ$ 为矩形.

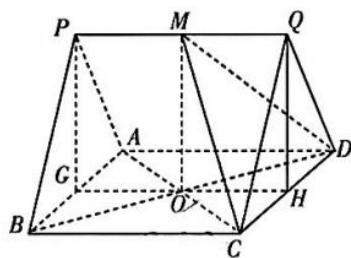
所以 $MO \parallel PG, MO \parallel QH$, 所以 $MO \perp$ 平面 $ABCD$,

又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $MO \perp AC$, (4分)

因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$, (5分)

又 $MO \cap BD = O$, 所以 $AC \perp$ 平面 OMD ,

又 $MD \subset$ 平面 OMD , 所以 $AC \perp MD$. (6分)



(II) 由已知可得平面 $ABP \parallel$ 平面 $DCQ, PQ \parallel BC \parallel CD$, 所以几何体 $ABP - DCQ$ 为三棱柱. (7分)

由已知可得 $V_{PM-ABCD} = V_{\text{三棱柱}ABP-DCQ} - V_{\text{三棱锥}M-CDQ} = \frac{5}{6} V_{\text{三棱柱}ABP-DCQ}$, (8分)

$S_{\triangle ABP} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (9分)

因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 所以三棱柱 $ABP - DCQ$ 的高为菱形 $ABCD$ 的 AB 边上的高, 也就是等边三角形 ABC 的高, 即为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (10分)

所以多面体 $PM - ABCD$ 的体积为 $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{16}$. (12分)

20. 解析 (I) 设椭圆 C 的半焦距为 $c (c > 0)$,

根据题意 $S_{\triangle DF_1F_2} = \frac{1}{2} |DF_1| \cdot |DF_2| \leq \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = bc = \sqrt{3}$, (2分)

因为 $|DF_2|$ 的最小值为 1, 所以 $a - c = 1$, 所以 $[(c+1)^2 - c^2]c^2 = 3$, (4分)

解之得 $c = 1, a = 2$, 所以 $b = \sqrt{3}$,

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (5分)

(II) 设 $G(x_1, y_1), H(x_2, y_2), M(x_M, y_M)$,

由题意可知 $A(-2, 0)$, 则直线 $AG: x = \frac{x_1+2}{y_1}y - 2$, 直线 $AH: x = \frac{x_2+2}{y_2}y - 2$.

因为 M 在直线 l 上, 所以 $x_M = -6$, 代入直线 AG 的方程, 可知 $y_M = \frac{-4y_1}{x_1+2}$,

故点 M 的坐标为 $(-6, \frac{-4y_1}{x_1+2})$, 所以 $k_{OM} = \frac{2y_1}{3(x_1+2)}$. (7分)

易知 $k_{AM} = k_{AH} = \frac{y_2}{x_2+2}$. (8分)

设直线 $GH: x = my - 6$, 与 C 的方程联立消去 x 得 $(3m^2 + 4)y^2 - 36my + 96 = 0$,

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{36m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{96}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (x_1 + 2)(x_2 + 2) &= (my_1 - 4)(my_2 - 4) = m^2 y_1 y_2 - 4m(y_1 + y_2) + 16 \\ &= m^2 \cdot \frac{96}{3m^2 + 4} - 4m \cdot \frac{36m}{3m^2 + 4} + 16 = \frac{64}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots (11 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } k_{AN} \cdot k_{OM} = \frac{2y_1 y_2}{3(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{96}{3m^2 + 4}}{\frac{64}{3m^2 + 4}} = 1,$$

即直线 AN 与 OM 的斜率之积为定值. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

21. 解析 (I) 由题意得 $f'(x) = e^x [x^2 + (a+2)x + 2a] = e^x (x+2)(x+a)$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

若 $a = 2$, $f'(x) = e^x (x+2)^2 \geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 无极值; $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

若 $a > 2$, 当 $x \in (-2, +\infty)$ 或 $x \in (-\infty, -a)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-a, -2)$ 时 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的极大值点为 $x = -a$, 不合题意; $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

若 $a < 2$, 当 $x \in (-a, +\infty)$ 或 $x \in (-\infty, -2)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-2, -a)$ 时 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的极大值点为 $x = -2$.

故可得 a 的取值范围是 $(-\infty, 2)$. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(II) 由 (I) 知 $x = -a$ 为 $f(x)$ 的极大值点,

$$\text{所以 } f(-a) = e^{-a} [(-a)^2 - a^2 + 2a] = 0, \text{ 得 } a = 0. \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } f(x) \geq mx^2 + mx, x \in \mathbb{R}, \text{ 即 } e^x \geq mx^2 + mx, \ln x + x \geq mx, m \leq \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1. \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

令 $t = x + \ln x$, 即为函数 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且值域为 \mathbb{R} , 所以 $t \in \mathbb{R}$,

故条件转化为: $\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq mt + 1$ 恒成立.

$$\text{设 } F(t) = e^t - mt - 1, \text{ 则 } F'(t) = e^t - m. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

若 $m \leq 0$, 则 $F'(t) = e^t - m > 0$, 所以 $F(t)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 所以当 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $F(t) < F(0) = 0$, 不符合条件; $\dots\dots\dots (9 \text{ 分})$

若 $0 < m < 1$, 当 $t \in (\ln m, 0)$ 时, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 单调递增, 所以在 $(\ln m, 0)$ 上 $F(t) < F(0) = 0$, 不符合条件;

若 $m = 1$, 当 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $F'(t) < 0$, $F(t)$ 单调递减, 当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $F'(t) > 0$, $F(t)$ 单调递增,

所以 $F(t) \geq F(0) = 0$, 符合条件;

若 $m > 1$, 当 $t \in (0, \ln m)$ 时, $F'(t) < 0$, $F(t)$ 单调递减, 所以在 $(0, \ln m)$ 上, $F(t) < F(0) = 0$, 不符合条件.

综上可知 m 的取值集合为 $\{1\}$. $\dots\dots\dots$

22. 解析 (I) 由 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$ 消去参数, 得 $x^2 = y$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\text{把 } \begin{cases} \rho \cos \theta = x, \\ \rho \sin \theta = y \end{cases} \text{ 代入极坐标方程 } \rho^2 = 6\rho \cos \theta - 8,$$

$$\text{得 } C_2 \text{ 的直角坐标方程为 } x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

(II) 依题可设 $P(t, t^2)$, 曲线 C_2 的方程可化为 $(x-3)^2 + y^2 = 1$, 表示以 $C(3, 0)$ 为圆心, 1 为半径的圆, $|PQ|$ 的最小值即 $|CP|$ 的最小值减去 1. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

$$\text{因为 } |CP|^2 = (t-3)^2 + (t^2-0)^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9, \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

设 $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$,

$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$,

由于 $2x^2 + 2x + 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0$ 恒成立, (8分)

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 即 $f(x)_{\min} = f(1) = 5$, (9分)

所以 $|CP|_{\min} = \sqrt{5} > 1$, 即 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{5} - 1$ (10分)

23. 解析 (I) $(a+1+b+1)^3 = (a+1)^3 + 3(a+1)^2(b+1) + 3(a+1)(b+1)^2 + (b+1)^3$
 $= 16 + 3(a+1)(b+1)(a+b+2)$ (1分)

$16 + \frac{3(a+1+b+1)^2}{4}(a+b+2)$

$= 16 + \frac{3(a+b+2)^3}{4}$, (3分)

所以 $(a+b+2)^3 \leq 64$, 因此 $a+b+2 \leq 4, a+b \leq 2$,

当且仅当 $a=b=1$ 时, 等号成立.

故 m 的值为 2. (5分)

(II) 因为 $|2x-a| \leq 2, |2y-a| \leq 2$, 所以 $|4y-2a| \leq 4$.

所以 $|2x-a| + |4y-2a| \leq 6$, (6分)

所以 $|(2x-a) - (4y-2a)| \leq |2x-a| + |4y-2a| \leq 6$, (8分)

即 $|2x-4y+a| \leq 6$ (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主选拔在线官方微信信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。

