长郡中学 2023 年上学期高一期中考试

数 学

命题人:饶金伟　　审题人:李典芳

时量:120 分钟　　满分:150 分

学号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　班级＿＿＿＿　学校＿＿＿＿

密 封 线 内 不 要 答 题

得分＿＿＿＿＿＿

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量,若向量 $\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2(k\in\mathbf{R})$ 与向量 $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 共线,则

A. $k=0$　　B. $k=1$　　C. $k=2$　　D. $k=\frac{1}{2}$

2. 定义:若 $z^2=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则称复数 z 是复数 $a+b\mathrm{i}$ 的平方根. 根据定义,复数 $9-40\mathrm{i}$ 的平方根为

A. $3-4\mathrm{i},-3+4\mathrm{i}$　　B. $4+3\mathrm{i},4-3\mathrm{i}$

C. $5-4\mathrm{i},-5+4\mathrm{i}$　　D. $4-5\mathrm{i},-4+5\mathrm{i}$

★3. 与向量 $\boldsymbol{a}=(4,2)$ 垂直的单位向量为

A. $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{-\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$或$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$

C. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{10},-\frac{1}{5}\right)$或$\left(-\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right)$

★4. 一个球的外切正方体的表面积等于 $6\ \mathrm{cm}^2$,则此球的体积为

A. $\frac{4}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi\ \mathrm{cm}^3$　　C. $\frac{1}{6}\pi\ \mathrm{cm}^3$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}\pi\ \mathrm{cm}^3$

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中,$PA\perp$平面 ABC,$PA=6$,$BC=3$,$\angle CAB=\frac{\pi}{6}$,则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径为

A. 3　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 6

6. 下列命题正确的为

①若$\triangle ABC$ 在平面 α 外,它的三条边所在的直线分别交 α 于 P、Q、R,则 P、Q、R 三点共线;

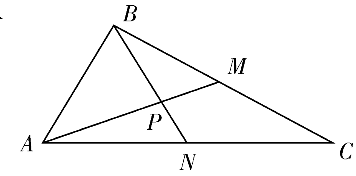
②若三条直线 a、b、c 互相平行且分别交直线 l 于 A、B、C 三点,则这四条直线共面;

③已知 a,b,c 为三条直线,若 a、b 异面,b、c 异面,则 a、c 异面;

④已知 a,b,c 为三条直线,若 $a\perp c$,$b\perp c$,则 $a/\!/b$.

A. ①③　　B. ②③　　C. ②④　　D. ①②

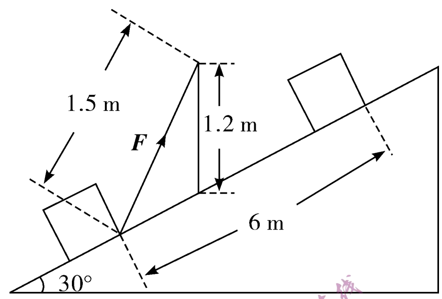
★7. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$AB=2$，$AC=5$，$\angle BAC=60^\circ$，BC、AC边上的两条中线AM，BN相交于点P，则$\angle MPN$的余弦值为



A. $\frac{4\sqrt{91}}{91}$　　B. $\frac{2\sqrt{91}}{91}$

C. $\frac{\sqrt{91}}{91}$　　D. $-\frac{4\sqrt{91}}{91}$

8. 如图，某人用 1.5 m 长的绳索，施力 25 N，把重物沿着坡度为30°的斜面向上拖了 6 m，拖拉点在竖直方向距离斜面的高度为 1.2 m，则此人对该物体所做的功为



A. $\sqrt{13}$ J　　B. $30\sqrt{13}$ J　　C. 125 J　　D. 150 J

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 已知$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$为复数，$\bar{z}$是$z$的共轭复数，则下列命题一定正确的是

A. 若z^2为纯虚数，则$a=b\neq 0$　　B. 若$\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，则$z\in\mathbf{R}$

C. 若$|z-\mathrm{i}|=1$，则$|z|$的最大值为 2　　D. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

★10. 关于直线m，n与平面α，β，下列命题正确的是

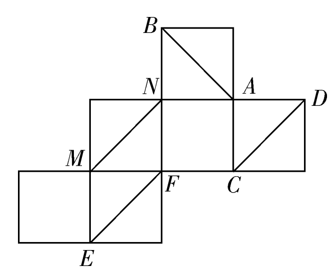
A. 若$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，且$\alpha/\!/\beta$，则$m/\!/n$

B. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，且$\alpha\perp\beta$，则$m\perp n$

C. 若$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，且$\alpha/\!/\beta$，则$m\perp n$

D. 若$m/\!/\alpha$，$n\perp\beta$，且$\alpha\perp\beta$，则$m/\!/n$

11. 一个正方体纸盒展开后如图所示，在原正方体纸盒中有如下结论，其中正确的是



A. $AB\perp EF$

B. AB与CM所成的角为60°

C. EF与MN是异面直线

D. $MN/\!/$平面ACD

12. 已知两个不相等的非零向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，两组向量$\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$、$\boldsymbol{x}_3$、$\boldsymbol{x}_4$、$\boldsymbol{x}_5$和$\boldsymbol{y}_1$、$\boldsymbol{y}_2$、$\boldsymbol{y}_3$、$\boldsymbol{y}_4$、$\boldsymbol{y}_5$均由 2 个$\boldsymbol{a}$和 3 个$\boldsymbol{b}$排列而成. 记$S=\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{y}_3+\boldsymbol{x}_4\cdot\boldsymbol{y}_4+\boldsymbol{x}_5\cdot\boldsymbol{y}_5$，$S_{\min}$表示$S$所有可能取值中的最小值. 则下列命题中真命题为

A. S可能有 5 个不同的值

B. 若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$S_{\min}$与$|\boldsymbol{a}|$无关

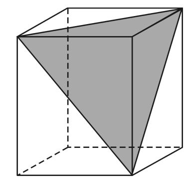
C. 若$|\boldsymbol{b}|>4|\boldsymbol{a}|$，则$S_{\min}>0$

D. 若$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$，$S_{\min}=8|\boldsymbol{a}|^2$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

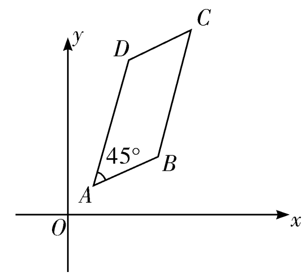
三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)



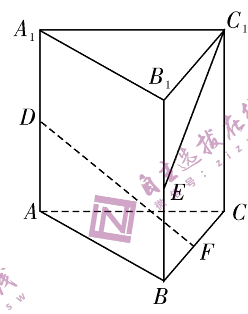
★13. 如图,将一个长方体沿着相邻三个面的对角线截出一个棱锥,则此棱锥的体积与剩下的几何体体积的比是____________.

14. 已知向量 $\overrightarrow{OC}=(2,2)$,$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$,则向量 $\overrightarrow{OA}$ 的模的最大值是____________.

★15. 在复平面内,O 为原点,向量$\overrightarrow{OM}=(a,\ b)$,对应复数为 $a+b\mathrm{i}(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$,将$\overrightarrow{OM}$绕 O 点沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{4}$,且将向量$\overrightarrow{OM}$的模变为原来的$\sqrt{2}$倍,得向量$\overrightarrow{ON}$,此时向量$\overrightarrow{ON}$对应的复数为$(a+b\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})=a-b+(a+b)\mathrm{i}$.现有一平行四边形 $ABCD$,如图,$A(1,\ 1)$,$B(3,2)$,$|AD|=\sqrt{2}\,|AB|$,$\angle BAD=45°$,则 D 点直角坐标为__________.



16. 如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\triangle ABC$ 是等边三角形,$AA_1=AB$,D,E,F 分别是棱 AA_1,BB_1,BC 的中点,则异面直线 DF 与 C_1E 所成角的余弦值是__________.



四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)已知复数 $z_1=(a+\mathrm{i})^2$,$z_2=4-3\mathrm{i}$,其中 a 是实数.

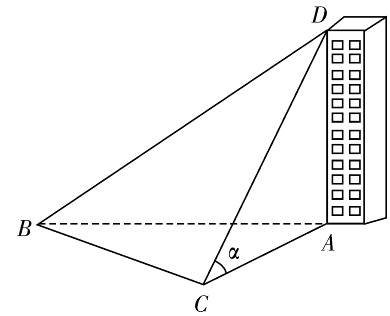
(1)若 $z_1=\mathrm{i}z_2$,求实数 a 的值;

(2)若$\frac{z_1}{z_2}$是纯虚数,a 是正实数,求$\frac{z_1}{z_2}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2022}$.

18.(12 分)某校学生利用解三角形有关知识进行数学实践活动. A 处有一栋大楼,某学生选 B,C 两处作为测量点,测得 BC 的距离为 50 m,$\angle ABC=45°$,$\angle BCA=105°$,在 C 处测得大楼楼顶 D 的仰角 α 为 75°.

(1)求 AC 两点间的距离;

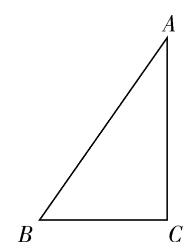
(2)求大楼的高度.



19.(12 分)已知在直角三角形 ABC 中,$AC\perp BC$,$BC=2$,$\tan\angle ABC=2\sqrt{2}$.

(1)若以 AC 为轴,直角三角形 ABC 旋转一周,求所得几何体的表面积;

(2)一只蚂蚁在问题(1)形成的几何体上从点 B 绕着几何体的侧面爬行一周回到点 B,求蚂蚁爬行的最短距离.



20.(12 分)在锐角$\triangle ABC$中,角A、B、C所对的边分别为a、b、c,已知边$c=2$,且$a\cdot\sin A-a\cdot\sin B=c\cdot\sin C-b\cdot\sin B$.

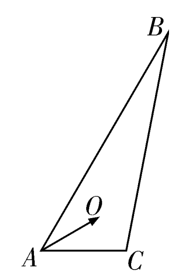
(1)若$\sin C+\sin(B-A)=\sin 2A$,求$\triangle ABC$的面积;

(2)记AB边的中点为M,求$|CM|$的最大值,并说明理由.

21.(12 分)如图所示,点O是$\triangle ABC$所在平面上一点,并且满足$\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$($m$、$n\in\mathbf{R}$),已知$AB=6$,$AC=2$,$\angle BAC=60^\circ$.

(1)若O是$\triangle ABC$的外心,求m、n的值;

(2)如果O是$\angle BAC$的平分线上某点,则当$m+\frac{3}{n}$达到最小值时,求$|\overrightarrow{AO}|$的值.



22.(12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,$\angle ABC=60^{\circ}$,$AB=2$,$AC\cap BD=O$,$PO\perp$底面 $ABCD$,$PO=2$,点 E 在棱 PD 上,且 $CE\perp PD$.

(1)证明:平面 $PBD\perp$平面 ACE;

(2)求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值.