全 国 大 联 考

2023 届高三第四次联考·

考生注意：

1. 本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 请将试卷答案填在答题卷上。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$，$B=\{-2,-1,1,2\}$，则 $(\complement_{R}A)\cap B=$

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-2,-1\}$

C. $\{-2,-1,1\}$　　D. $\{-2,-1,1,2\}$

2. 已知复数 $z_1=2+i$，$z_2=-1+2i$，则 $|z_1-\frac{z_1}{z_2}|=$

A. 1　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 正四棱台的上、下底面边长分别为 2，4，侧棱长为 $\sqrt{11}$，则其体积为

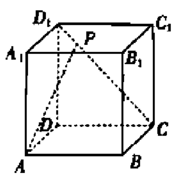
A. 28　　B. $\frac{28}{3}$　　C. 32　　D. 24

4. 设 $\{a_n\}$ 是首项为正数的等比数列，公比为 q，则"$q<-2$"是"对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$"的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是线段 CD_1 上的动点，则



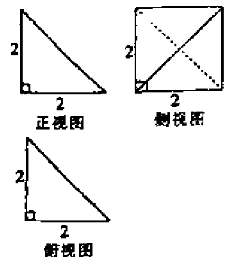
A. $AP\perp$ 平面 BB_1D_1

B. $AP\perp$ 平面 A_1BD

C. $AP//$ 平面 A_1BC_1

D. $AP//$ 平面 BC_1D

6. 冶铁技术在我国已有悠久的历史，据史料记载，我国最早的冶铁技术可以追溯到春秋时代. 已知某铁块的三视图如图所示，若将该铁块浇铸成一个铁球，则该铁球的表面积为



A. $2\cdot(\frac{2}{\pi})^{\frac{1}{3}}$

B. $(\frac{2}{\pi})^{\frac{2}{3}}$

C. $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

D. $4\sqrt[3]{\pi}$

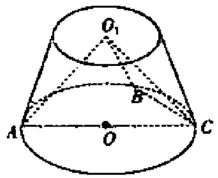
7. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，若 $AB=2$，$BC=CD=4$，则 AC 与 BD 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a>b$，$\cos(A-B)=\frac{1}{8}$，$a=10$，且 $\cos C=\frac{31}{32}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. $\frac{15}{4}$　　B. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$　　C. $\frac{15\sqrt{7}}{2}$　　D. $15\sqrt{7}$

9. 在如图所示的圆台 OO_1 中，AC 为圆 O 的一条直径，B 为圆弧 AC 上靠近点 C 的一个三等分点，若 $O_1A\perp O_1C$，$O_1A=O_1C=2\sqrt{2}$，则点 A 到平面 CBO_1 的距离为



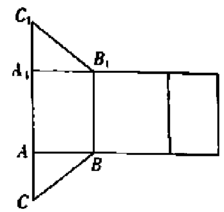
A. $\frac{4\sqrt{7}}{7}$　　B. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$　　D. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$

10. 设 $a=3e^{-0.3}$，$b=e^{0.6}$，$c=1.6$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

11. 在通用技术课上，某小组将一个直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 展开，得到的平面图如图所示. 其中 $AB=4$，$AC=3$，$BC=AA_1=5$，M 是 BB_1 上的点，则在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，下列结论错误的是



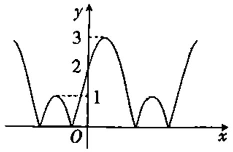
A. AM 与 A_1C_1 是异面直线

B. $AC\perp A_1M$

C. 平面 AB_1C 将三棱柱截成一个五面体和一个四面体

D. A_1M+MC 的最小值是 $2\sqrt{26}$

12. 已知函数 $f(x)=A\cos(2x+\varphi)-1(A>0,0<\varphi<\pi)$，若函数 $y=|f(x)|$ 的部分图象如图所示，则关于函数 $g(x)=A\sin(Ax-\varphi)$，下列结论错误的是



A. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

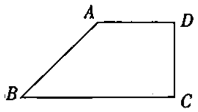
B. 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 对称

C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的减区间为 $[0,\frac{\pi}{12}]$

D. 函数 $g(x)$ 的图象可由函数 $y=f(x)+1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 如图，梯形 $ABCD$ 是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $\angle ABC=45°$，$AB=AD=1$，$DC\perp BC$，则原图形的面积为__________.



14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,-1)$，试写出一个非零向量 $\boldsymbol{c}=$________，使得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=3a_n-2n$，若 $a_m>560$，则正整数 m 的最小值是________.

16. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为 BC 的中点. 当点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动时，有 $MN\parallel$ 平面 A_1BD，则线段 MN 的最小值为__________.

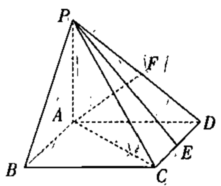
三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=1$，$AB=\sqrt{3}$，F 是 PD 的中点，点 E 在棱 CD 上.

(1)求四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积；

(2)求证：$PE\perp AF$.



18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+a_n=2n+5(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $a_1=3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}1,n=1\\ \log_{(n+1)}a_n,n\geq2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，若 $b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_k=3(k\in\mathbf{N}^*)$，求 k 的值.

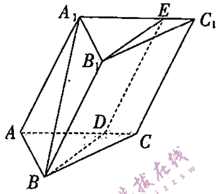
19.(12 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,四边形 AA_1C_1C 是边长为 4 的菱形,$AB=BC=\sqrt{13}$,点 D 为棱 AC 上一动点(不与 A,C 重合),平面 B_1BD 与棱 A_1C_1 交于点 E.

(1)求证:$BB_1 /\!/ DE$.

(2)若$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{4}$,从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知条件,求直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值. 条件①平面 $ABC\perp$平面 AA_1C_1C;条件②$\angle A_1AC=60°$;条件③$A_1B=\sqrt{21}$.

注:若选择多种组合解答,则按第一个解答计分.

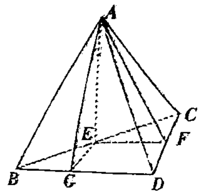


20.(12 分)

如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中,$\triangle ABC$ 是正三角形,平面 $ABC\perp$平面 BCD,$BD\perp CD$,点 E,F 分别是 BC,DC 的中点.

(1)证明:$CD\perp$平面 AEF.

(2)若$\angle BCD=60°$,点 G 是线段 BD 上的动点,问:点 G 运动到何处时,平面 AEG 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值最大.



21.(12分)

图1是直角梯形 $ABCD$，$AB/\!/CD$，$\angle D=90^\circ$，四边形 $ABCE$ 是边长为2的菱形，并且 $\angle BCE=60^\circ$，以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起，使点 C 到达 C_1 的位置，且 $AC_1=\sqrt{6}$，如图2.

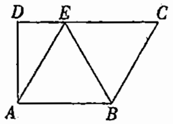


图1

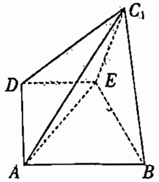


图2

(1)求证：平面 $BC_1E\perp$ 平面 $ABED$.

(2)在棱 DC_1 上是否存在点 P，使得点 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$？若存在，求出直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值；若不存在，请说明理由.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=2\ln x+4$，$g(x)=x+\dfrac{3}{x}+3$.

(1)证明：$f(x)<g(x)$.

(2)设方程 $f(x)=e^x$ 有两个实根 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$，求证：$\dfrac{1}{e^2}<x_1<1<x_2<2$.