

长郡、雅礼、一中、附中联合编审名校卷

2021 届高三月考试卷九(全国卷)

数 学(理科)

时量:120 分钟 满分:150 分

得分

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求.)

1. 若复数 $z = (1+ai) \cdot (1-i)$ 的模等于 2,其中 i 为虚数单位,则实数 a 的值为
A. -1 B. 0 C. 1 D. ± 1

2. 已知向量 $a = (1, x)$, $b = (0, 2)$,则 $\frac{a \cdot b}{|a|}$ 的最大值为
A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1

3. 设 $m \in \mathbb{R}$,则“ $1 \leq m \leq 2$ ”是“直线 $l: x + y - m = 0$ 和圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 - m$ 有公共点”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 2020 年,我国脱贫攻坚已取得决定性胜利.如图是 2015—2019 年年末全国农村贫困人口和贫困发生率(贫困人口占目标调查人口的比重)的变化情况(数据来源:国家统计局 2019 年统计年报).根据图表可得出的正确统计结论是



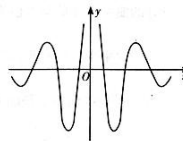
A. 五年来贫困发生率下降了 5.2 个百分点
B. 五年来农村贫困人口减少超过九成
C. 五年来农村贫困人口减少得越来越快
D. 五年来目标调查人口逐年减少

5. 设正实数 a, b 满足 $a + b = 1$,则下列说法错误的是
A. $\sqrt{ab}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b}$ 有最小值 3
C. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$
D. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$,则称 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”.已知正项数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 为“梦想数列”,且 $b_1 + b_2 + b_3 = 1$,则 $b_6 + b_7 + b_8 =$
A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

理科数学试题 第 1 页(共 4 页)

7. 著名数学家华罗庚先生曾说过:“数缺形时少直观,形缺数时难入微,数形结合百般好,隔裂分家万事休.”在数学的学习和研究中,我们经常用函数的图象来研究函数的性质,也经常用函数的解析式来琢磨函数的图象的特征,如某体育品牌的 LOGO 为 ,可抽象为如图所示的轴对称的优美曲线,下列函数中,其图象大致可“完美”局部表达这条曲线的函数是



A. $f(x) = \frac{\sin 5x}{2^x - 2^{-x}}$ B. $f(x) = \frac{\cos x}{2^x - 2^{-x}}$

C. $f(x) = \frac{\cos 5x}{|2^x - 2^{-x}|}$ D. $f(x) = \frac{\sin \frac{5x}{2}}{|2^x - 2^{-x}|}$

8. 已知将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象,且 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,函数 $y = f(x)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上至多存在两个极大值点,则下列说法正确的是

A. $\omega = 7$ B. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上单调递增

C. $\omega = 2$ D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

9. 已知棱长为 a 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的所有顶点均在体积为 $32\sqrt{3}\pi$ 的球 O 上,动点 P 在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内运动(包含边界),若直线 CC_1 与直线 AP 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$,则

A. $a = 2$

B. 点 P 运动轨迹的长度为 $\sqrt{2}\pi$

C. 三棱锥 $P - AC_1D_1$ 体积的取值范围为 $[\frac{32-8\sqrt{2}}{3}, \frac{32}{3}]$

D. 线段 OP 长度的最小值为 $\sqrt{5}$

10. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上有两个动点 M, N , F 为该抛物线的焦点. 已知 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$,以 MN 为直径的圆的周长为 8π ,且过该圆的圆心 P 作该抛物线准线 l 的垂线 PQ ,垂足为 Q ,则线段 $|PQ|$ 的最大值为

A. $4\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. 8

理科数学试题 第 2 页(共 4 页)

11. 曲率半径是用来描述曲线上某点处曲线弯曲变化程度的量, 已知对于曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > 0, b > 0$) 上点 $P(x_0, y_0)$ 处的曲率半径公式为 $R = a^2 b^2 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}}$, 则关于下列说法:

- ① 对于半径为 R 的圆, 其圆上任一点的曲率半径均为 R ;
- ② 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点处的曲率半径的最大值为 a ;
- ③ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点处的曲率半径的最小值为 $\frac{b^2}{a}$;
- ④ 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 上点 $\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$ 处的曲率半径随着 a 的增大而减小.

其中正确的有

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

12. 四面体 $ABCD$ 的四个顶点都在球 O 上, 且 $AB=AC=BC=BD=CD=4, AD=2\sqrt{6}$, 则球 O 的表面积为

- A. $\frac{70\pi}{3}$ B. $\frac{80\pi}{3}$ C. 30π D. 40π

二、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \dots + a_{10}(1-x)^{10}$, 则 $a_8 =$ _____.

14. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题: “今有人持金出五关, 前关二而税一, 次关三而税一, 次关四而税一, 次关五而税一, 次关六而税一, 并五关所税, 适重一斤, 问本持金几何” 其意思为 “今有人持金出五关, 第 1 关收税金 $\frac{1}{2}$, 第 2 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{3}$, 第 3 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{4}$, 第 4 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{5}$, 第 5 关收税金为剩余金的 $\frac{1}{6}$, 5 关所收税金之和, 恰好重一斤, 问原本持金多少?” 若将题中 “5 关所收税金之和, 恰好重一斤, 问原本持金多少?” 改成 “假设这个人原本持金为 x , 按此规律通过第 8 关”, 则第 8 关需收税金为 _____.

15. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$) 的公共焦点为 F_1, F_2 , 将 C_1, C_2 的离心率记为 e_1, e_2 , 点 A 是 C_1, C_2 在第一象限的公共点, 若点 A 关于 C_2 的一条渐近线的对称点为 F_1 , 则 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} =$ _____.

16. 将 5 个不同的小球全部放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒子中, 若每个盒子中所放的球的个数不大于其编号数, 则共有 _____ 种不同的放法.

三、解答题(本题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.)

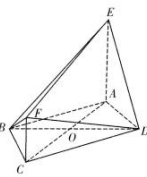
(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}c - 2b \sin C = 0$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $b = 3\sqrt{3}, a = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 如图, 七面体 $ABCDEF$ 的底面是凸四边形 $ABCD$, 其中 $AB=AD=2, \angle BAD=120^\circ, AC, BD$ 垂直相交于点 $O, OC=2OA$, 棱 AE, CF 均垂直于底面 $ABCD$.

- (1) 证明: 直线 DE 与平面 BCF 不平行;
- (2) 若 $CF=1$, 求直线 BC 与平面 BFD 所成角的正弦值.



19. (12 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线为 l , 过抛物线上一点 B 向 x 轴作垂线, 垂足恰好为抛物线 C 的焦点 F , 且 $|BF|=4$.

- (1) 求抛物线 C 的方程;
- (2) 设 l 与 x 轴的交点为 A , 过 x 轴上的一个定点 $(1, 0)$ 的直线 m 与抛物线 C 交于 D, E 两点. 记直线 AD, AE 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 + k_2 = \frac{1}{3}$, 求直线 m 的方程.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} kx^2 - x, g(x) = \ln x - kx, 0 < k < \frac{1}{e}$.

- (1) 判断函数 $g(x)$ 的零点个数;
- (2) 求证: $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2} > -1$.

21. (12 分) “博弈”原指下棋, 出自我国《论语·阳货》篇. 现在多指一种决策行为, 即一些个人团队或组织, 在一定规则约束下, 同时或先后, 一次或多次, 在各自允许选择的策略下进行选择和实施, 并从中各自取得相应结果或收益的过程. 生活中有很多游戏都蕴含着博弈, 比如现在有两个人玩 “亮” 硬币的游戏, 甲、乙约定若同时亮出正面, 则甲付给乙 3 元, 若同时亮出反面, 则甲付给乙 1 元, 若亮出结果是一正一反, 则乙付给甲 2 元.

- (1) 若两人各自随机 “亮” 出正反面, 求乙收益的期望;
- (2) 因为各自 “亮” 出正反面, 而不是抛出正反面, 所以可以控制 “亮” 出正面或反面的频率 (假设进行多次游戏, 频率可以代替概率), 因此双方就面临竞争策略的博弈. 甲、乙可以根据对手出正面的概率调整自己出正面的概率, 进而增加自己赢得收益的期望, 以收益的期望为决策依据, 甲、乙各自应该如何选择 “亮” 出正面的概率, 才能让结果对自己最有利? 并分析游戏规则是否公平.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的方程为 $x + y = 1$. 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 求曲线 C 和直线 l 的极坐标方程;
- (2) 已知射线 OM 的极坐标方程是 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 且与曲线 C 和直线 l 在第一象限的交点分别为 P, Q , 求 $|PQ|$ 的长.

23. (10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |2x+1|$.

- (1) 若 $f(x+1) + f(x-1) \leq 5$, 求实数 x 的取值范围;
- (2) 若 $a \in (-\infty, +\infty)$, 且 $a \neq 0$, 求证: $\forall x \in (-\infty, +\infty), f(x+a) + f\left(x - \frac{1}{a}\right) \geq 4$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线

关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》

