绝密★考试结束前

2023-2024 学年第一学期天域全国名校协作体联考

高三年级数学学科参考答案

选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	D	A	D	B	D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	AD	ABD	BCD	ABC

非选择题部分

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．4　　14．7　　15．200π　　16．$(-\infty,15+6\sqrt{7})$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】（1）由题意：$(a_1+2)^2=a_1(a_1+6)$，解得：$a_1=2$.　……………………　2 分

所以 $b_1=2,b_2=4,q=2$，所以 $b_n=2^n$.　……………………　4 分

（2）$c_n=a_n+(-1)^n\cdot b_n=2n+(-1)^n\cdot 2^n=2n+(-2)^n$

$S_n=n(n+1)+\dfrac{-2[1-(-2)^n]}{3}$　………………　8 分

$=n^2+n-\dfrac{(-2)^{n+1}}{3}-\dfrac{2}{3}$　………………　10 分

18.【解析】(1) $2a\sin A\cos B+b\sin 2A=2\sqrt{3}a\cos C$，

于是 $a\sin A\cos B+b\sin A\cos A=\sqrt{3}a\cos C$， ………………………… 1 分

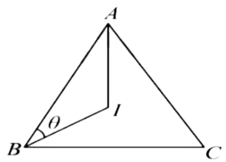
在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\sin^2 A\cos B+\sin A\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，

因为 $\sin A\neq 0$，则 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sqrt{3}\cos C$，即 $\sin(A+B)=\sqrt{3}\cos C$，

因为 $A+B+C=\pi$，因此 $\sin C=\sqrt{3}\cos C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$，又 $C\in(0,\pi)$， ………………… 3 分

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………… 4 分

(2) 由 (1) 知，$C=\dfrac{\pi}{3}$，有 $\angle ABC+\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，



而 $\angle BAC$ 与 $\angle ABC$ 的平分线交于点 I，即有 $\angle ABI+\angle BAI=\dfrac{\pi}{3}$，

于是 $\angle AIB=\dfrac{2\pi}{3}$， ………………………… 5 分

设 $\angle ABI=\theta$，则 $\angle BAI=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，

在 $\triangle ABI$ 中，由正弦定理得，$\dfrac{BI}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{AI}{\sin\theta}=\dfrac{AB}{\sin\angle AIB}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=4$， ………………… 7 分

所以 $BI=4\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)$，$AI=4\sin\theta$，

所以 $\triangle ABI$ 的周长为 $2\sqrt{3}+4\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)+4\sin\theta=2\sqrt{3}+4(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta)+4\sin\theta$

$=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta=4\sin(\theta+\dfrac{\pi}{3})+2\sqrt{3}$， ………………………… 9 分

由 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，得 $\dfrac{\pi}{3}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$，

则当 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\triangle ABI$ 的周长取得最大值 $4+2\sqrt{3}$，

所以 $\triangle ABI$ 周长的最大值为 $4+2\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

19.【解析】

(1) $\because(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)\times 2=1$，$\therefore a=0.1$. …………… 2 分

(2) 由频率分布直方图可得：周平均阅读时间在 $(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$ 三组的频率之比为 $0.05:0.04:0.01=5:4:1$，$\therefore 10$ 人中，周平均阅读时间在 $(12,14]$ 的人数为 $10\times\dfrac{5}{10}=5$ 人；在 $(14,16]$ 的

人数为$10\times\frac{4}{10}=4$人；在$(16,18]$的人数为$10\times\frac{1}{10}=1$人；

则X所有可能的取值为$0,1,2,3$， ………………………… 3分

$\therefore P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$；　　$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$；

$P(X=2)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$；　　$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$； ………………………… 5分

$\therefore X$的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$\therefore$数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. ………………………… 7分

（3）用频率估计概率，从该地区学生周平均阅读时间在$[8,14]$内中随机抽取20名学生，周平均阅读时间在$(10,12]$内的概率$p=\frac{0.2}{0.3+0.2+0.1}=\frac{1}{3}$，则

$P(k)=C_{20}^{k}p^{k}(1-p)^{20-k}=C_{20}^{k}\times(\frac{1}{3})^{k}\times(\frac{2}{3})^{20-k}=\frac{C_{20}^{k}2^{20-k}}{3^{20}}$， ………………………… 9分

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}=\frac{\frac{C_{20}^{k+1}2^{19-k}}{3^{20}}}{\frac{C_{20}^{k}2^{20-k}}{3^{20}}}=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{20!}{(k+1)!(19-k)!}}{\frac{20!}{k!(20-k)!}}=\frac{1}{2}\times\frac{20-k}{k+1}=\frac{1}{2}(-1+\frac{21}{k+1}).$$

令$\frac{P(k+1)}{P(k)}=\frac{1}{2}(-1+\frac{21}{k+1})\geqslant 1$，解得$k\leqslant 6$， ………………………… 11分

所以当$k=6$或$k=7$，$P(k)$最大.

所以，周平均阅读时间在$(10,12]$内的学生最可能有6名或7名. ………………………… 12分

20.【解析】

方法一：（1）证明：取DE中点L，DC中点K，AD中点M，DB中点J

$\because LK /\!/ MJ, LK=MJ \therefore LMJK$是平行四边形 ………………………… 2分

$\therefore LM // JK, KG // EF // DB, KG = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}DB = JB,$

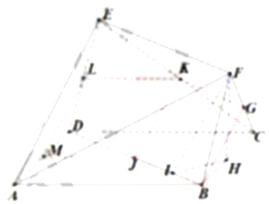
$\therefore KGBJ$ 是平行四边形，$\therefore LM // BG // AE$ ………………………… 4 分

$\therefore BG //$ 平面 AEF ………………………… 5 分

（2）由（1）知，直线 AE 与平面 $BDEF$ 所成角等于直线 GB 与平面 $BDEF$ 所成角

………………………… 7 分

作 $FH \perp BC, HI \perp DB$，连结 IF，



$\because H, G$ 都是所在棱的中点，$\therefore HG //$ 平面 $DBEF$，

$\therefore G$ 点到平面 $DBEF$ 的距离等于 H 点到平面 $DBEF$ 的距离 d，

$FH = \frac{\sqrt{3}}{2}, HI = BH \sin\angle IBC = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad FI = \sqrt{\frac{19}{20}}$

………………………… 9 分

由等面积法可知：即 $HI \cdot FH = FI \cdot d$，解得 $d = \sqrt{\frac{3}{19}}$ ………………………… 11 分

$\sin\theta = \frac{d}{FH} = \frac{2\sqrt{19}}{19}, \ \cos\theta = \frac{\sqrt{385}}{19}$ ………………………… 12 分

方法二：取 BC 中点 H，取 AD 中点 M，因为平面 $FBC \perp$ 平面 $ABCD$，结合$\triangle FBC$ 为等边三角形，知 $FH \perp$ 平面$ABCD$，以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HF}$ 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 ………………………… 2 分

（1）$A\left(2, \frac{1}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right), D\left(2, -\frac{1}{2}, 0\right), F\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $G\left(0, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

可知 $\overrightarrow{BG}=\left(0,-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ………………………… 3 分

$\overrightarrow{AF}=\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则平面 AEF 的一个

法向量 $\vec{n}=\left(\frac{1}{2},1,\sqrt{3}\right)$ ………………………… 6 分

故 $\overrightarrow{BG}\cdot\vec{n}=0$，即 $BG//$ 平面 AEF ………………………… 7 分

（2）$\overrightarrow{AE}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，平面 $BDEF$ 的一个法向量

$\overrightarrow{m}=\left(1,2,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ………………………… 9 分

则 $\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{m}\right|}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{19}{3}}}=\frac{2\sqrt{19}}{19}$ ，$\cos\theta=\frac{\sqrt{385}}{19}$

………………………… 12 分（公式 1 分，结论 2 分）

21. 【解析】（1）$\triangle PAB$周长为$|PA|+|PB|+|AB|=4\sqrt{2}+4$，

可得$|PA|+|PB|=4\sqrt{2}$ 为定值， ………………………… 1 分

所以点 P 的轨迹是一个椭圆（去掉左右顶点），

于是，$\begin{cases}2a=4\sqrt{2}\\2c=4\\a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\\c=2\end{cases}\Rightarrow\left\{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\right.$， ………………………… 3 分

又因为是 $\triangle PAB$，所以点 P 不能位于 x 轴上，

所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1(y\neq 0)$ ………………………… 5 分

（2）由题意，直线 l 的斜率不为 0，设直线 $l:x=ny-2$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

将直线 l 与椭圆联立得到 $(n^2+2)y^2-4ny-4=0$， ………………………… 6 分

由韦达定理，得$\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{4n}{n^2+2} \\ y_1\cdot y_2=\dfrac{-4}{n^2+2} \end{cases}$

直线$BM: y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令$x=0$可得$D(0,\dfrac{-2y_1}{x_1-2})$，同理$E(0,\dfrac{-2y_2}{x_2-2})$ ………………… 8 分

由$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BMN}$可得$\dfrac{1}{2}\times|y_D-y_E|\times 2=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times|y_2-y_1|$，

化简得到$|\dfrac{8(y_2-y_1)}{(x_1-2)(x_2-2)}|=2|y_2-y_1|$

即$|(x_1-2)(x_2-2)|=4$，亦即$\left|n^2y_1y_2-4n\left(y_1+y_2\right)+16\right|=4$ ………………………… 10 分

代入韦达定理整理得，$\dfrac{\left|32\text{-}4n^2\right|}{n^2+2}=4$，解得$n^2=3$，

所以直线l的方程为$x\pm\sqrt{3}y+2=0$ ………………………… 12 分

22. 【解析】

（1）$f'(x)=\dfrac{e}{x}-x\cdot e^x$， ………………………… 1 分

注意到$f'(x)$在定义域上单调递减，且$f'(1)=0$，可知$f(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减 ………………………… 2 分

则$f(x)$的最大值为$f(1)=0$ ………………………… 3 分

（2）（i）因$f(x)$存在两个零点x_1,x_2，故$f(x)$不是单调函数，于是$f'(x)=0$有解，即

$f'(x)=\dfrac{a-x^2\cdot e^x}{x}$，此时$a>0$ ………………………… 4 分

注意到$f(1)=0$恒成立 ………………………… 5 分

设$f'(x_0)=0$，则$f(x)$在$(0,x_0)$单调递增，在$(x_0,+\infty)$单调递减，

由（1）可知而当$a=e$时，$x_0=1$，$f(x)$在仅有1个零点

当$a\in(0,1]$时，$f(e^{-\frac{1}{a}})=a\cdot(-\frac{1}{a})-(e^{-\frac{1}{a}}-1)\cdot e^{e^{-\frac{1}{a}}}<-1+1-e^{-\frac{1}{a}}<0$

当$a\in(1,e)$时，$x_0\in(0,1)$，此时，$f(x_0)>0$，

取$x=\ln a$，有$f(\ln a)=a\left(\ln(\ln a)-(\ln a-1)\right)$，结合$\ln x<x-1$，可知$f(\ln a)<0$，故在$(\ln a,x_0)$上存在一个零点； 6分

当$a\in(e,+\infty)$时，$x_0\in(1,+\infty)$，此时，$f(x_0)>0$，

取$x=\ln a$，有$f(\ln a)=a\left(\ln(\ln a)-(\ln a-1)\right)$，结合$\ln x<x-1$，可知$f(\ln a)<0$，故在$(x_0,\ln a)$上存在一个零点 7分

综上可知，当$a\in(0,e)\cup(e,+\infty)$时，$f(x)$存在两个零点，

（ii）不妨取$x_1=1$，当$a>\mathrm{e}$时，由（i）可知$x_2>x_0>1$，若x_1,x_0,x_2成等差数列，则有$x_2=2x_0-1$，

因$f(x)$在$(x_0,+\infty)$单调，故$f(x_2)=f(2x_0-1)=0$， 8分

而$f(2x_0-1)=a\ln(2x_0-1)-(2x_0-2)\cdot e^{2x_0-1}=\left(x_0^2\ln(2x_0-1)-(2x_0-2)e^{x_0-1}\right)\cdot e^{x_0}$，

令$h(x)=x^2\ln(2x-1)-(2x-2)e^{x-1}$， 9分

当$x>1$时，$h'(x)=2x\ln(2x-1)+\dfrac{2x^2}{2x-1}-(2x)e^{x-1}=2x[\ln(2x-1)+\dfrac{x}{2x-1}-e^{x-1}]$

令$m(x)=\ln(2x-1)+\dfrac{x}{2x-1}-e^{x-1}$

则$m'(x)=\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}-e^{x-1}=\dfrac{2(2x-1)-1}{(2x-1)^2}-e^{x-1}\le\dfrac{4x-3}{(2x-1)^2}-x$

$\therefore m'(x)\le\dfrac{-4x^3+4x^2+3x-3}{(2x-1)^2}=\dfrac{-(x-1)(4x^2-3)}{(2x-1)^2}\le 0$， 11分

故 $h(x)=x^2\ln(2x-1)-(2x-2)e^{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，而 $h(1)=0$，故，使得 $h(x_0)=0$，即

不存在 $x_0>1$，使得 $f(2x_0-1)=0$，故不存在这样的 a。 .... 12 分