2023届高三3月大联考

理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】由题意可知，$z(i-1)=2i$，$z=\frac{2i}{i-1}=\frac{2i(1+i)}{(i-1)(i+1)}=1-i$，∴$z$的共轭复数$\bar{z}=1+i$，∴$z$的共轭复数的虚部为1. 故选B.

2. B 【解析】因为$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x|y=\sqrt{2-x}\}=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\leqslant 1$或$x>3\}$，∴$\complement_U B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，$A\cap\complement_U B=\{x|1<x\leqslant 2\}$. 故选B.

3. B 【解析】由题可得，二项式$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{a}{x}\right)^7$的展开式的通项公式为：$T_{r+1}=C_7^r(\sqrt[3]{x})^{7-r}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^r=C_7^r\cdot a^r\cdot x^{\frac{7-4r}{3}}$ $(r=0,1,2,\cdots,7)$，令$\frac{7-4r}{3}=1$，解得$r=1$，展开式中含x项的系数为$C_7^1\cdot a=35$，∴$a=5$. 故选B.

4. A 【解析】因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以有$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-2x+2=0$，得$x=1$，因为$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，所以有$-y=-\frac{1}{2}$，得$y=\frac{1}{2}$，故$x+y=\frac{3}{2}$. 故选A.

5. C 【解析】函数$g(x)=[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1$在区间$(e^{-1},e)$上有两个零点，即$[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$在区间$(e^{-1},e)$上有两个不相等的实数根，因为$f(x)=\ln x$，代入$[\lambda f(x)+3]\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$，整理可得$(3+\lambda\ln x)\cdot\ln\frac{1}{x}+1=-\lambda(\ln x)^2-3\ln x+1=0$，即$\lambda(\ln x)^2+3\ln x-1=0$. 令$t=\ln x$，因为该函数为增函数，$x\in(e^{-1},e)$，所以$t\in(-1,1)$，令$h(t)=\lambda t^2+3t-1$，则问题转化为函数$h(t)$在$(-1,1)$上有两个零点即可，列式为：

$$\begin{cases}\Delta=9+4\lambda>0\\ h(-1)=\lambda-4>0\\ h(1)=\lambda+2>0\\ -1<-\frac{3}{2\lambda}<1\end{cases}$$，解得$\lambda>4$. 故选C.

6. B 【解析】因为正三棱柱的上顶点A_1，B_1，C_1分别在正三棱锥$P-ABC$的侧棱上，所以三棱锥$P-A_1B_1C_1$为正三棱锥，设其高为h_1，则$A_1A_2=10-h_1$，设$A_1B_1=x$ $(0<x<5)$，则$C_1B_1=C_1A_1=x$，所以$\frac{x}{5}=\frac{h_1}{10}$，故$h_1=2x$，则$A_1A_2=10-h_1=10-2x$，故三棱柱的体积为$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(10-2x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(10x^2-2x^3)$，求导可得$V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(20x-6x^2)=0$，∴$x=0$（舍去）或$x=\frac{10}{3}$，当$x\in\left(0,\frac{10}{3}\right)$时，$V'(x)>0$，$V(x)$单调递增；当$x\in\left(\frac{10}{3},5\right)$时，$V'(x)<0$，$V(x)$单调递减. 所以当$x=\frac{10}{3}$时，内接三棱柱的体积取得最大值，$V(x)_{max}=\frac{250\sqrt{3}}{27}m^3$. 故选B.

7. B 【解析】被2除余1，且被3除余2的正整数按照从小到大的顺序排列，构成首项为5，公差为$3\times 2=6$的等差数列，则$a_n=5+6(n-1)=6n-1$，从而

$\frac{6n^2+27}{a_n+1}=\frac{6n^2+27}{6n}=n+\frac{9}{2n}\geqslant 2\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}$，当且仅当 $2n^2=9$，$n=\sqrt{\frac{9}{2}}$ 时，等号成立，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，经验证当 $n=2$ 时比 $n=3$ 时数值要小．故选 B．

8．D 【解析】因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率等于焦距，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=2c$，$\therefore a=\frac{1}{2}$，因为焦点到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because a^2+b^2=c^2=1$，$\therefore c=1$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，因为圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 的圆心坐标为 $O_1(1,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，易求圆心 $O_1(1,0)$ 到 C 的其中一条渐近线 $y=\sqrt{3}x$ 的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故根据勾股定理，可求直线 $y=\sqrt{3}x$ 被圆截得的弦长为 $2\times\sqrt{r^2-d^2}=2\times\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{5}$．故选 D．

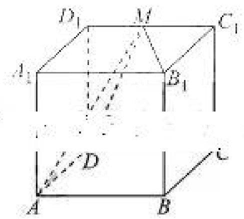
9．A 【解析】$\because \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$ ①，$\therefore 1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，解得 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$，又 $\because 0<\alpha<\frac{3}{4}\pi$，$\therefore \sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，从而有 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$，由于 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{\frac{1}{25}}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ ②，联立①②得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$，$\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$，因为 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{17\sqrt{2}}{50}$．故选 A．

10．D 【解析】因为 C 的准线方程是 $x=-1$，故有：$-\frac{p}{2}=-1$，$\therefore p=2$，故抛物线 $C:y^2=4x$，因为 A、B 两点关于直线 $x+y-5=0$ 对称，所以直线 l_{AB} 的斜率为 1，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 l_{AB} 的方程为 $y=x+m$，联立：$\begin{cases}y=x+m\\y^2=4x\end{cases}$，整理得：$x^2+(2m-4)x+m^2=0$，根据韦达定理有：$\begin{cases}x_1+x_2=4-2m\\x_1x_2=m^2\\\Delta=(2m-4)^2-4m^2>0\end{cases}$，由 $\Delta=(2m-4)^2-4m^2>0$，得 $m<1$，且 $y_1+y_2=x_1+x_2+2m=4$，即 AB 的中点坐标为 $(2-m,2)$，因为 A、B 两点关于 $x+y-5=0$ 对称，所以点 $(2-m,2)$ 一定在直线 $x+y-5=0$ 上，于是 $2-m+2-5=0$，解得：$m=-1$，满足 $m<1$，故直线 AB 所在的直线方程为 $y=x-1$，即 D 正确，故选 D．

11．A 【解析】由图象可知：$A=\sqrt{2}$，最小正周期 $T=4\times\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\sqrt{2}$，$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{7\pi}{24}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$，故函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$．由 $-\frac{\pi}{2}+2n\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{12}+n\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+n\pi$，$n\in\mathbf{Z}$，令 $n=$

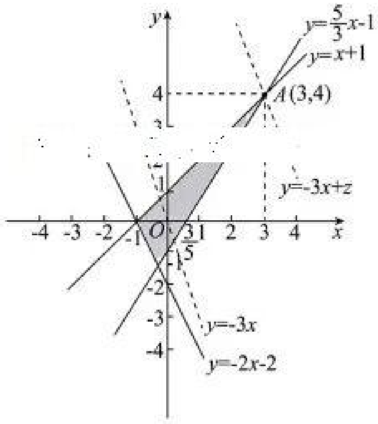
0，得$-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$，因为$g(x)$在区间$[-k,k]$上单调递增，所以实数$k$的最大值为$\frac{\pi}{12}$. 故选 A.

12. D 【解析】设$BC=a$，则$AA_1=AB=2a$，因为$BC//AD$，$BC\not\subset$平面ADM，$AD\subset$平面ADM，所以$BC//$平面ADM，故直线BC到平面ADM的距离为点B到平面ADM的距离，设点B到平面ADM的距离为d，由$V_{B-ADM}=V_{M-ABD}$，得$\frac{1}{3}S_{\triangle ADM}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\times AA_1$，由于$S_{\triangle ADM}=\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{5}a=\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times a\times 2a=a^2$，$d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，代入上式$a=3$；从而有$AA_1=AB=6$，$BC=3$，设长方体外接球的半径为$R$，则有$(2R)^2=6^2+6^2+3^2$，所以$R^2=\frac{81}{4}$，所以该长方体外接球的表面积为$S=4\pi R^2=81\pi$. 故选 D.



二、填空题

13. 13 【解析】根据不等式组$\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\5x-3y-3\leqslant 0\\2x+y+2\geqslant 0\end{cases}$所表示的平面区域，不难确定出当直线$z=3x+y$经过点$A(3,4)$时，$z$取得最大值，$z_{\max}=3\times 3+4=13$. 故答案为 13.



14. $\{x|2<x<3\}$ 【解析】设$g(x)=f(x)+1=2^x-\frac{1}{2^x}+2x$，定义域为$\mathbf{R}$，显然函数$g(x)$为增函数，且$g(-x)=-g(x)$，故函数$g(x)$为奇函数，不等式$f(3+x^2)+f(3-5x)<-2\Rightarrow f(3+x^2)+1<-[f(3-5x)+1]$，即$g(3+x^2)<g(5x-3)$，因为函数$g(x)$为增函数，故有$x^2+3<5x-3$，即$x^2-5x+6<0$，解得$2<x<3$，即不等式的解集为$\{x|2<x<3\}$，故答案为$\{x|2<x<3\}$.

15. $\frac{\pi}{4}$ 【解析】由已知得$\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4}{5}$，$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times b\times\frac{7\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=7$，得$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，根据余弦定理可得$c^2+b^2-2bc\cos A=a^2$，$c=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，代入可得$a=4$. 因为$b=\frac{5\sqrt{2}}{2}<a=4$，所以$B<A$，因为$B$为三角形内角，所以$B$必定为锐角，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$B=\frac{\pi}{4}$. 故答案为$\frac{\pi}{4}$.

16. $\frac{2}{5}$ 【解析】从所有新能源汽车购买者中随机抽取1人，抽到货车或小轿车购买者的概率为

$\frac{200+900}{200+900+a}=\frac{1\ 100}{1\ 100+a}=\frac{11}{12}$，解得 $a=100$，由此可知货车与小客车销售量之比为 $2:1$，所以货车和小客车的 6 名购买者中，货车有 4 人，小客车有 2 人，则从这 6 人中任取 2 人的所有情况 $C_6^2=15$ 种，这两人都是货车购买者的情况为 $C_4^2=6$ 种，故这两人都是货车购买者的概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

三、解答题

17. **解**：(1)数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$a_{n+1}=2+3S_n(n\in\mathbf{N}^*)$.

则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=2+3S_{n-1}$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=3(S_n-S_{n-1})=3a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$.

当 $n=1$ 时，$a_2=2+3S_1=2+3a_1=8$，满足 $\frac{a_2}{a_1}=4$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，所以 $a_n=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$，故 $a_n=2^{2n-1}$.　　(5 分)

(2)由第(1)问可知 $a_n=2^{2n-1}$，因为 $b_n=\frac{(-1)^{n+1}n}{\log_2 a_n\log_2 a_{n+1}}$，故有 $b_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$

$=(-1)^{n+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，　　(7 分)

当 n 为偶数时，

$T_n=\frac{1}{4}\times\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\times\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{n}{4n+2}$，

当 n 为奇数时，　　(9 分)

$T_n=\frac{1}{4}\times\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\cdots-\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n+1}{4n+2}$，　　(11 分)

综上所述，$T_n=\begin{cases}\frac{n+1}{4n+2}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{n}{4n+2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　(12 分)

18. **解**：(1)因为 $\bar{x}=\frac{2+3+5+7+8}{5}=5$，$\bar{y}=\frac{30+40+55+70+80}{5}=55$，

所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=210$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=26$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=1700$，所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{210}{\sqrt{44\ 200}}\approx\frac{210}{210.328}\approx0.999>0.75$，

所以 y 与 x 之间具有很强的相关性.　　(6 分)

(2)根据第(1)问可知：$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=210$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=26$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{210}{26}=\frac{105}{13}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=55-\frac{105}{13}\times5=\frac{190}{13}$，　　(9 分)

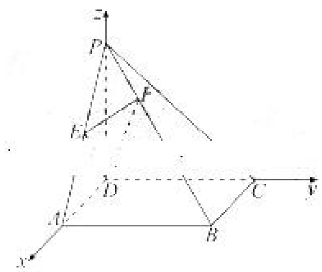
所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\frac{105}{13}x+\frac{190}{13}$.　　(10 分)

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=\frac{105}{13}\times10+\frac{190}{13}=\frac{1\ 240}{13}\approx95.38$，

故预测 2022 年 10 月份前来旅游的人数约为 95 万人.　　(12 分)

19. **证明**：(1)因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AB$. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，又 $PD\cap AD=D$，故 $AB\perp$ 平面 PAD. 因为 $DE\subset$ 平面 PAD，故 $AB\perp DE$. 又因为 $AD=PD$，点 E 是 PA 的中点，所以 $PA\perp DE$. 又 $PA\cap AB=A$，故 $DE\perp$ 平面 PAB. 因为 $PB\subset$ 平面 PAB，故 $PB\perp DE$.（5 分）

(2)因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$ABCD$ 是矩形，所以 DA,DP,DC 两两垂直，所以以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系.



设 $PD=h(h>0)$，

则 $D(0,0,0)$，$P(0,0,h)$，$A(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$B(2,4,0)$.

因为点 E 是 PA 的中点，所以 $E\left(1,0,\frac{h}{2}\right)$，

因为 F 为 PB 上一点，且 $FB=2FP$，所以 $F\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2h}{3}\right)$.（7 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DEF 的法向量，

$\overrightarrow{DE}=\left(1,0,\frac{h}{2}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2h}{3}\right)$，（8 分）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x+\frac{h}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y+\frac{2h}{3}z=0\end{cases}$，令 $z=2$，得 $x=-h$，$y=-\frac{h}{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(-h,-\frac{h}{2},2\right)$.

因为 $\overrightarrow{PC}=(0,4,-h)$，

故有 $|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{4\times\left(-\frac{h}{2}\right)-2h}{\sqrt{h^2+16}\cdot\sqrt{h^2+\frac{h^2}{4}+4}}\right|=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，

因为 $PD\leqslant 2$，解得 $h=2$，所以平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(-2,-1,2)$.（10 分）

因为平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，

设平面 DEF 与平面 PCD 所成的锐二面角为 θ，则

$\cos\theta=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DA}|}\right|=\left|\frac{-2}{3\times 1}\right|=\frac{2}{3}$. 所以平面 DEF 与平面 PCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

（12 分）

20. **解**：(1)由题意得 MF：$\frac{x}{-c}+\frac{y}{b}=1$，即 $bx-cy+bc=0$，原点 O 到线段 MF 的距离 $d=\frac{bc}{\sqrt{c^2+b^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{6}$，$b=2$，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$.（4 分）

(2)①当动直线 l 的斜率不存在时，则不可能满足 $MA\perp MB$；（5 分）

②当动直线 l 的斜率 k 存在时，因为 $MA\perp MB$，故直线 l 不可能经过点 $M(0,2)$，故设动直线 l 的方程为 $y=kx+m\ (m\neq 2)$，由 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消去 y 并化简得 $(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$，

$\Delta=36k^2m^2-4(2+3k^2)(3m^2-12)>0$，整理得 $6k^2+4-m^2>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-6km}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{2+3k^2}$，（7 分）

$\overrightarrow{MA}=(x_1,y_1-2)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2,y_2-2)$，

由于 $MA\perp MB$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=0$，

即 $x_1x_2+(y_1-2)(y_2-2)=0$，$x_1x_2+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=0$，$x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)-2(kx_1+m+kx_2+m)+4=0$，

$(1+k^2)x_1x_2+(km-2k)(x_1+x_2)+(m-2)^2=0$，$(1+k^2)\frac{3m^2-12}{2+3k^2}-(km-2k)\frac{6km}{2+3k^2}+(m-2)^2=0$，

即 $(1+k^2)(3m^2-12)-(km-2k)\times 6km+(m-2)^2(2+3k^2)=0$，

化简得 $5m^2-8m-4=0$，由于 $m\neq 2$，故 $m=-\frac{2}{5}$，（10 分）

所以直线 AB 的方程为 $y=kx-\frac{2}{5}$，所以直线 AB 过定点 $E\left(0,-\frac{2}{5}\right)$，因为椭圆的左焦点为 $F(-\sqrt{2},0)$，显然，当 $EF\perp l$ 时，点 F 到直线 l 的距离最大，此时，$\because k_{EF}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，$\therefore k_{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，此时直线 l 的方程为 $y=\frac{5\sqrt{2}}{2}x-\frac{2}{5}$，即 $25x-5\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$。（12 分）

21．解：(1)因为函数 $f(x)=xe^{x-1}$，$g(x)=\ln x+x+1$，故 $F(x)=xe^{x-1}-\ln x-x-1$，$x\in(0,+\infty)$，求导可得 $F'(x)=(x+1)e^{x-1}-\frac{(x+1)}{x}=(x+1)\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)$，

令 $m(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，则 $m'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $m(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$m(x)<0$，$F(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$m(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

所以 $F(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$。（5 分）

(2)法一：因为不等式 $ef(x)-g(x)\geqslant\frac{a-1}{2}x$，$x\in(0,+\infty)$，等价于 $xe^x-\frac{a+1}{2}x-\ln x-1\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，整理可得 $\frac{a+1}{2}\leqslant\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，令 $h(x)=\frac{xe^x-\ln x}{x}-\frac{1}{x}$，$x>0$，

则 $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$，（6 分）

令 $k(x)=x^2e^x+\ln x$，$x>0$，因为 $k'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $k(x)=x^2e^x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $k\left(\frac{1}{e}\right)=\left(\frac{1}{e}\right)^2e^{\frac{1}{e}}+\ln\frac{1}{e}=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$k(1)=e>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使得 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，（8 分）

当 $0<x<x_0$ 时，$k(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$k(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故当 $x=x_0$ 时，$h(x)$ 取得最小值，$h(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$，（9 分）

令 $\varphi(x)=xe^x$，$x>0$，则 $\varphi'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

由 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，

可得 $x_0e^{x_0}=-\frac{1}{x_0}\ln x_0=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$，

$\ln\frac{1}{x_0}\in(0,1)$，

则 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，即 $\ln x_0=-x_0$，带入 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，得 $x_0e^{x_0}=1$，　　(11 分)

则 $h(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{1+x_0-1}{x_0}=1$，故有 $\frac{a+1}{2}\leqslant 1$，解得 $a\leqslant 1$，故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

(12 分)

法二：先证 $xe^x\geqslant\ln x+x+1(\forall x>0)$，

事实上可知 $u-\ln u-1\geqslant 0$（$u=1$ 时等号成立），

将 $u=xe^x$ 代入上式中得 $xe^x-\ln(xe^x)-1\geqslant 0$，

即得 $xe^x-\ln x-\ln e^x-1\geqslant 0$，即 $xe^x-\ln x-x-1\geqslant 0$ 成立（当 $xe^x=1$ 时等号成立），即 $ef(x)-g(x)\geqslant 0$ 成立，

$\therefore$ 当 $a\leqslant 1$ 时，$\frac{a-1}{2}x\leqslant 0\leqslant ef(x)-g(x)$ 成立，故原式成立.　　(8 分)

而 $a>1$ 时，令 x_0 满足 $x_0e^{x_0}=1$，$\ln x_0+x_0=0$，

则 $ef(x_0)-g(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-x_0-1=0$，

而 $\frac{a-1}{2}x_0>0$，原式不成立，由此可知 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.　　(12 分)

22. 解：(1)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）中的参数 t 消去，得 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$；

由 $\rho^2(5-3\cos 2\theta)=8$，得 $\rho^2[5-3(1-2\sin^2\theta)]=8$，

整理得 $\rho^2+3(\rho\sin\theta)^2=4$，

又 $x^2+y^2=\rho^2$，$y=\rho\sin\theta$，所以 C 的直角坐标方程为 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.　　(4 分)

(2)因为点 P 为曲线 C 上任意一点，设点 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，直线 l 方程：$x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$，

根据点到直线的距离公式可得：

$$d=\left|\frac{2\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2\sqrt{3}}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta-2\sqrt{3}}{2}\right|$$

$=\left|\frac{\sqrt{7}\sin(\theta-\varphi)-2\sqrt{3}}{2}\right|$，（其中 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$），当 $\sin(\theta-\varphi)=-1$，即 $\theta-\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$\left|\frac{\sqrt{7}\sin(\theta-\varphi)-2\sqrt{3}}{2}\right|$ 取最大值 $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{2}$，此时

$2\cos\theta=2\cos(2k\pi-\frac{\pi}{2}+\varphi)=2\sin\varphi=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，

$\sin\theta=\sin(2k\pi-\frac{\pi}{2}+\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，

所以 $P\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$，

综上 $P\left(\frac{4\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$ 到直线 $l:x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$ 的距离最大，最大值为 $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{3}}{2}$.　　(10 分)

23. 解：(1) 因为 $f(x)=|x-5|+\left|\frac{1}{2}x+1\right|=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+4,x\leqslant -2\\ 6-\frac{1}{2}x,-2<x<5,\\ \frac{3}{2}x-4,x\geqslant 5\end{cases}$

所以 $f(x)\leqslant 4$ 等价于 $\begin{cases}x<-2\\ -\frac{3}{2}x+1\leqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\leqslant x<5\\ 5-\frac{1}{2}x\leqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 5\\ \frac{3}{2}x-1\leqslant 1\end{cases}$

解得 $4\leqslant x<5$ 或 $5\leqslant x\leqslant\frac{16}{3}$，故不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $\left\{x\middle|4\leqslant x\leqslant\frac{16}{3}\right\}$.　　(5 分)

(2) 因为 $f(x)+\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a\right|=|x-5|+|x-a|\geqslant|x-5-(x-a)|=|a+5|$，当且仅当 $(x-5)(x-a)\leqslant 0$ 时等号成立，所以 $|a+5|\geqslant a^2-1$，所以 $a+5\geqslant a^2-1$ 或 $a+5\leqslant -a^2+1$.

解得 $-2\leqslant a\leqslant 3$，故 a 的取值范围是 $[-2,3]$.

(10 分)