

2022-2023 学年金一高中高二上学期 12 月考试卷

高二数学

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

命题: 魏燕 校对: 厉小康

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 40 分。在每小题给出的四个选项中, 第只有一项符合题目要求)

1. 过点 $P(3, -2)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线方程是 ()

- A. $x = -2$ B. $x = 3$ C. $y = -2$ D. $y = 3$

2. 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$ 的位置关系为 ()

- A. 相交 B. 内切 C. 外切 D. 外离

3. 在四棱锥 $A-BCD$ 中, M, N 分别为 AB, CD 的中点, 则 ()

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

4. 直线 $y = 2x + 1$ 关于原点对称的直线方程是 ()

- A. $y = 2x - 1$ B. $y = -2x - 1$ C. $y = -2x + 1$ D. $y = 2x$

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则 ()

- A. 数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是等差数列 B. 数列 $\{a_n^2\}$ 是等比数列 C. 数列 $\{\lg a_n\}$ 是等差数列 D. 数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2)$, 则 ()

- A. $a_1 : a_2 : a_3 = a_6 : a_7 : a_8$ B. $a_n : a_{n+1} : a_{n+2} = 1 : 2 : 2$
C. S_6, S_{12}, S_{18} 成等差数列 D. S_{6n}, S_{12n}, S_{18n} 成等比数列

7. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线与 C 交于 P, Q 两点, 若

$|PF_1| = 2|PF_2| = 5|F_1Q|$, 则 C 的离心率是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

8. 已知点 $P(\sqrt{3}, 0)$, A_1, A_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右顶点, B, C 两点均在 y 轴左侧且在椭圆上运动 (均不与 A_1

重合). 若点 B, C 关于 x 轴对称点分别为 B_1, C_1 , 直线 BA_1 与 B_1A_2 相交于点 E , 直线 CA_1 与 C_1A_2 相交于点 F , 则

$|PE|+|PF|-|EF|$ 的最小值为 ()

- A. $4\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

二、多选题 (本题共 4 小题, 每题 5 分, 共 20 分, 每道题有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错或不答的得 0 分。)

9. 直线 l 的方向向量为 $\vec{u}$, 两个平面 α, β 的法向量分别为 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, 则下列命题为真命题的是 ()

- A. 若 $\vec{u} \perp \vec{n}_1$, 则直线 $l \perp$ 平面 α B. 若 $\vec{u} // \vec{n}_1$, 则直线 $l //$ 平面 α
C. 若 $\cos \langle \vec{u}, \vec{n}_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 则直线 l 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$ D. 若 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则平面 α, β 的夹角的大小为 $\frac{\pi}{6}$

10. 小冰家向银行贷款 a 万元, 贷款时间为 n 年, 如果贷款月利率为 r , 那么按照等额本金方式还款, 她家从起始月开始, 每月应还本金 $b (= \frac{a}{12n})$ 万元, 每月支付给银行的利息 (单位: 万元) 依次为 $ar, ar-br, ar-2br, ar-3br, \dots$.

若小冰家完全按照合同还款 (银行利率保持不变, 也未提前还贷), 则小冰家的还款情况下列叙述正确的是 ()

- A. 小冰家每月的还款额是相等的 B. 小冰家总共还款次数是 $12n$ 次
C. 小冰家最后一个月应还款是 $\frac{a}{12n}(1+r)$ 万元 D. 小冰家还完款, 付的利息总额是 $ar(6n + \frac{1}{2})$ 万元

11. 瑞士著名数学家欧拉在 1765 年提出定理: 三角形的外心、重心、垂心位于同一直线上, 这条直线被后人称为三角形的“欧拉线”. 在平面直角坐标系中作 $\triangle ABC$, $AB=AC$, 点 $B(-2, 4)$, 点 $C(5, -3)$, 且其“欧拉线”与圆 M :

$(x-5)^2 + y^2 = r^2$ 相切, 则下列结论正确的是 ()

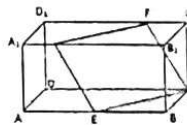
A. 圆 M 上点到直线 $x-y+3=0$ 的最大距离为 $4\sqrt{2}$ B. 若点 (x, y) 在圆 M 上, 则 $\frac{y}{x-1}$ 的取值范围是 $[-1, 1]$

C. 若点 (x, y) 在圆 M 上, 则 $x+y$ 的最小值是 1

D. 圆 $(x-a-1)^2 + (y-a)^2 = 2$ 与圆 M 有公共点, 则 a 的取值范围是 $[2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}]$

12. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $AA_1=BC=1$, 点 E 为 AB 的中点, 过 CE 作长方体的截面 α 交棱 C_1D_1 于点 F , 则 ()

- A. 不存在点 F , 使得 $DF \perp \alpha$ B. 当截面为平行四边形时, 截面面积的最大值为 $\sqrt{2}$
C. 截面可能是六边形 D. 随 C_1F 的增大, 直线 AF 与截面 α 所成角的大小先增大再减小



三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若 P 与 A, B, C (A, B, C 三点不共线) 四点共面, 且对于空间任一点 O , 都有 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ ($t \in \mathbb{R}$), 则 $t =$ _____.

14. 已知三条直线 $x-y+1=0$, $3x-y-1=0$, $x-ay+5=0$ 不能围成三角形, 则实数 a 的值为 _____.

15. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线交抛物线于 A, B 两点, O 为坐标原点, 记直线 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 =$ _____.

16. 三棱锥 $O-ABC$ 中, OA, OB, OC 两两垂直且相等, 点 P, Q 分别是线段 BC 和 OA 上移动, 且满足 $BP \leq \frac{1}{2}BC$, $AQ \leq \frac{1}{2}AO$, 则 PQ 和 OB 所成角余弦值的取值范围是 _____.

四、解答题：（本题共 6 小题，共 70 分。其中 17 题 10 分，其余每题均 12 分。解答应写出必要的文字说明、方程式和重要演算步骤。只写出最后答案的不能得分。有数值计算的题，答案中必须明确写出数值和单位。）

17. 已知点 $M(1, 3)$ ，圆 $C: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 。(1) 若直线 l 过点 M ，且被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$ ，求直线 l 的方程；
(2) 设 O 为坐标原点，点 N 在圆 C 上运动，线段 MN 的中点为 P ，求点 P 的轨迹方程。

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $a_1 = 2$ ， $S_3 = 12$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 与前 n 项和 S_n ；

(2) 求 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_{10}}$ 的值。

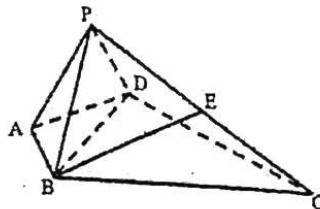
19. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，抛物线 C 上存在一点 $E(2, t)$ 到焦点 F 的距离等于 3。

(1) 求抛物线 C 的方程；

(2) 过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两不同点，交 y 轴于点 N ，已知 $\overrightarrow{NA} = \lambda \overrightarrow{AF}$ ， $\overrightarrow{NB} = \mu \overrightarrow{BF}$ ，求证： $\lambda + \mu$ 为定值。

20. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD = 2$, $BD = 4$, $AB = 2\sqrt{3}$, BD 是 $\angle ADC$ 的平分线, 且 $BD \perp BC$.

(1) 若点 E 为棱 PC 的中点, 证明: $BE \parallel$ 平面 PAD ; (2) 已知二面角 $P-AB-D$ 的大小为 60° , 求平面 PBD 和平面 PCD 的夹角的余弦值.



21. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 0 的等差数列. a_1, a_2, a_5 成等比数列. 数列 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{b_1}{2^{n-1}} + \frac{b_2}{2^{n-2}} + \frac{b_3}{2^{n-3}} + \cdots + b_n = a_n.$$

(I) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式; (II) 求证: $\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{a_3}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^2 > a_{n+1}.$

22. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 且点 $(3, \sqrt{2})$ 在 C 上.

(1) 求双曲线 C 的方程; (2) 试问: 在双曲线 C 的右支上是否存在一点 P , 使得过点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切

线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N , 且 $S_{\triangle MON} = \frac{\sqrt{3}}{33}$? 若存在, 求出点 P ;

若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线