

内部资料·注意保存

试卷类型: B

江门市 2023 年普通高中高二调研测试 (二)

数 学

本试卷共 6 页, 22 小题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 做选择题时, 必须用 2B 铅笔将答题卷上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时, 必须用黑色字迹钢笔或签字笔, 将答案写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答, 在试题卷上作答无效。
5. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 某运动员射击一次所得环数 ξ 的分布列如表所示, 则

$$P(\xi \geq 9) =$$

- A. 0.69 B. 0.67 C. 0.66 D. 0.64

ξ	8	9	10
P	0.36	a	0.33

2. 若 $A_n^2 = 42 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $C_n^2 =$

- A. 30 B. 20 C. 35 D. 21

3. 在回归分析中, 下列判断正确的是

- A. 回归直线不一定经过样本点的中心 B. 样本相关系数 $r \in [0, 1]$
C. 相关系数 $|r|$ 越接近 1, 拟合效果越好 D. 相关系数 r 越小, 相关性越弱

4. 已知 $f(x) = x^m (m \in \mathbb{Q}, \text{且 } m \neq 0)$, 若 $f'(-1) = -2$, 则 $m =$

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. -3

5. 若直线 $x - y + 3 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2x + 2 - a = 0$ 相切, 则 $a =$

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

6. 以罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理为主体的“中值定理”反映函数与导数之间的重要联系, 是微积分学重要的理论基础, 其中拉格朗日中值定理是“中值定理”的核心, 其内容如下: 如果函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 则 (a, b) 内至少存在一个点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$, 其中



- $x = x_0$ 称为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的“中值点”. 请问函数 $f(x) = 5x^3 - 3x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的“中值点”的个数为
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
7. 将 5 名教育志愿者分配到甲、乙、丙和丁 4 个学校进行支教, 每名志愿者只分配到 1 个学校, 每个学校至少分配 1 名志愿者, 则不同的分配方案共有
- A. 60 种 B. 120 种 C. 240 种 D. 480 种
8. 设 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 若 $a_n + 2a_{n+1} = 0, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $a_2 - a_3 = 192$, 当 T_n 取得最小值时, 则 $n =$
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

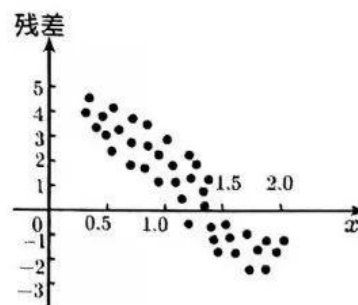
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2, 4)$, 则

- A. $P(X \leq 3) > \frac{1}{2}$ B. $P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(\frac{5}{2} \leq X \leq 3\right)$
- C. $P\left(0 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$ D. X 的方差为 2

10. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据, 由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 得到线性回归模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 对应的残差如图所示, 则残差模型

- A. 满足回归模型 $E(e) = 0$ 的假设
- B. 不满足回归模型 $E(e) = 0$ 的假设
- C. 满足回归模型 $D(e) = \sigma^2$ 的假设
- D. 不满足回归模型 $D(e) = \sigma^2$ 的假设



11. 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 则

- A. $f(x)$ 的图像是轴对称图形 B. $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, +\infty)$
- C. $f(x)$ 的极值小值为 2 D. $f(x)$ 的极大值为 2

12. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点 (其中点 A 在 x 轴上方)，则

A. $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = 1$

B. 弦 AB 的长度最小值为 1

C. 以 AF 为直径的圆与 y 轴相切

D. 以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的最大值为_____.

14. 在 $(x + \frac{1}{x})^5$ 的展开式中， x^3 的系数为_____. (用数字作答)

15. 已知甲箱内有 4 个白球 2 个黑球，乙箱内有 3 个白球 2 个黑球，先从甲箱中任取一球放入乙箱，然后从乙箱中任取一球，则事件“从乙箱中取得黑球”的概率为_____.

16. 一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次. X 表示抽到的二等品件数，则 $D(X) =$ _____；若将抽出的产品送往专门的检测部门检测，且检测费用 Y 元与二等品件数 X 满足： $Y = 10X + 300$ ，则 $D(Y) =$ _____.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 6, a_4 = 20$ ，数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $b_n = \frac{a_n}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

(1) 求 b_2, b_4 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

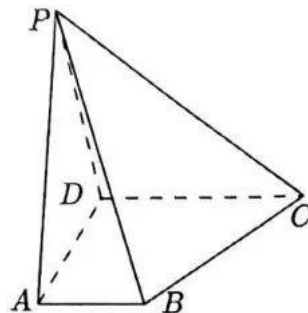
(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 。

18. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD ，四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AB \parallel CD, AD \perp DC$ 。

(1) 求证： $AD \perp PC$ ；

(2) 若 $AB = 1, AD = DC = DP = 2, \angle PDC = 120^\circ$ ，求平面 PAB 与平面 ABC 的夹角的余弦值。



19. (12 分)

体育承载着国家强盛、民族振兴的梦想. 为推动落实全民健身国家战略, 某学校以锻炼身体为目的, 每天下午组织足球训练活动.

(1) 为了解喜爱足球运动是否与性别有关, 从该校随机抽取了男学生和女学生各 100 名观众进行调查, 得到如下列联表:

	喜爱足球运动	不喜爱足球运动
男学生	60	40
女学生	20	80

依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验, 能否认为喜爱足球运动与性别有关?

(2) 在某次足球训练课上, 球首先由 A 队员控制, 此后足球仅在 A, B, C 三名队员之间传递, 假设每名队员控球时传给其他队员的概率如表所示:

控球队员	A		B		C	
接球队员	B	C	A	C	A	B
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

若传球 3 次, 记 B 队员控球次数为 X , 求 X 的分布列及均值.

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$

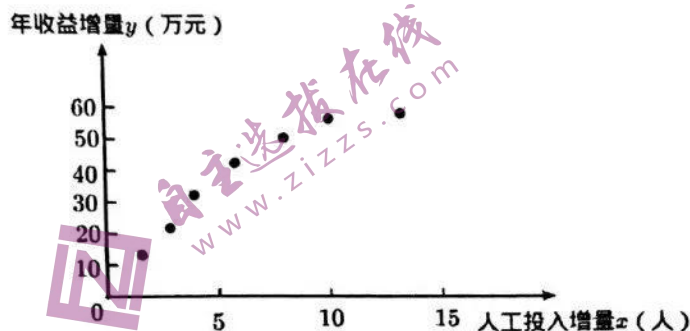
附表:

α	0.010	0.005	0.001
χ_{α}^2	6.635	7.879	10.828

20. (12 分)

台山市镇海湾蚝是台山市著名的特产，因镇海湾的生蚝田处于咸淡水交汇之地，所以这里的生蚝长得比其他地方肥大，味道更加鲜美. 2023 年镇海湾某养殖基地考虑增加人工投入，根据市场调研与模拟，得到人工投入增量 x 人与年收益增量 y 万元的数据和散点图分别如下：

x	2	3	4	6	8	10	13
y	13	22	31	42	50	56	58



根据散点图，建立了 y 与 x 的两个回归模型：

模型①： $\hat{y} = 4.1x + 11.8$ ；模型②： $\hat{y} = \hat{b}\sqrt{x} + \hat{a}$ 。

(1) 求出模型②中 y 关于 x 的回归方程 (精确到 0.1)；

(2) 比较模型①，②的决定系数 R^2 的大小，说明哪个模型拟合效果更好，并用该模型预测，要使年收益增量超过 80 万元，人工投入增量至少需要多少人？(精确到 1)

线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的系数：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x};$$

$$\text{模型的决定系数: } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

参考数据：令 $t = \sqrt{x}$ ，则 $\hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}$ ，且 $\bar{t} \approx 2.46$ ， $\bar{y} \approx 38.86$ ， $\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) \approx 80.97$ ，

$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 \approx 3.78$ ；模型①中 $\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 182.42$ ；模型②中 $\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 74.12$ 。

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$, 其中 $a \geq 1$.(1) 若 $a=1$, 求 $f(x)$ 的单调区间;(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

22. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且与双曲线 $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ 有相同的焦距.(1) 求椭圆 C 的方程;(2) 设椭圆 C 的左、右顶点分别为 A, B , 过左焦点 F 的直线 l 交椭圆 C 于 D, E 两点 (其中点 D 在 x 轴上方), 求 $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比的取值范围.

江门市 2023 年普通高中高二调研测试（二）

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	A	A	B	C	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	BD	AC	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{e}$	5	$\frac{7}{18}$	1.96 (3分); 196 (2分)

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) $\because a_2 = 6, a_4 = 20$,

$$\therefore b_2 = \frac{a_2}{2} = 3, b_4 = \frac{a_4}{4} = 5, \dots\dots\dots 2 \text{ 分 (各 1 分)}$$

$\because$ 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_2 = 3, b_4 = 5$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 1, 首项为 2, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = n + 1$, $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \because b_n = \frac{a_n}{n} = n + 1$$

$$\therefore a_n = n(n + 1), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{数列} \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} \text{的前 } n \text{ 项和 } S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = 1 - \frac{1}{n + 1} = \frac{n}{n + 1}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (1) 证明: $\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

$AD \subset$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, 1 分

$\therefore AD \perp$ 平面 PCD , 2 分

又 $PC \subset$ 平面 PCD , 3 分

$\therefore AD \perp PC$ 4 分

(2) 解法 (一) 过点 P 分别作 $PE \perp DC$, $PF \perp AB$, 垂足为点 E , F ,

连结 PE 于, DE , EF , PF 和 AF , 5 分

$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

$PE \subset$ 平面 PCD , $PE \perp DC$, 6 分

$\therefore \angle PFE$ 为二面角 $P-AB-C$ 的平面角, 8 分

在 $Rt\triangle PEF$ 中, $PE = \sqrt{3}$, $EF = AD = 2$,

$\therefore \tan \angle PFE = \frac{PE}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 10 分

$\therefore \cos \angle PFE = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 11 分

故平面 PAB 与平面 ABC 所成的夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 12 分

解法 (二) 在平面 PCD 内过点 D 作 $DH \perp DC$, 且交 PC 于 H ,

$\because$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 PCD ,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $PCD = CD$,

$AD \subset$ 平面 $ABCD$,

$DH \perp DC$,

$\therefore DH \perp$ 平面 PCD , 5 分

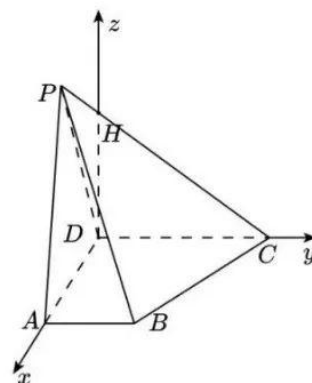
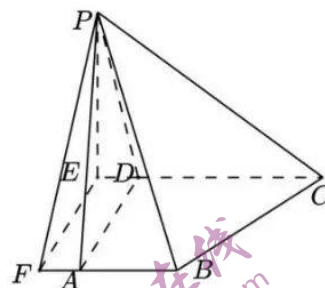
如图, 以 D 为坐标原点, DA, DC, DH 所在直线分别为 x 轴,

y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 6 分

则 $D(0,0,0)$, $P(0,-1,\sqrt{3})$, $A(2,0,0)$, $B(2,1,0)$, $C(0,2,0)$ 7 分

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n} = (0,0,1)$, 8 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$,





$$\because \vec{PA} = (2, 1, -\sqrt{3}), \vec{AB} = (0, 1, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PA} = 2x + y - \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AB} = y = 0 \end{cases}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{取 } z = 2, \text{ 则 } \vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 2) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

设平面 PAB 与平面 ABC 的夹角的为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{故平面 } PAB \text{ 与平面 } ABC \text{ 所成的夹角的余弦值为 } \frac{2\sqrt{7}}{7} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. 解: (1) 零假设为 H_0 : 喜爱足球运动与性别相互独立, 即喜爱足球运动与性别无关, 1 分

$$\therefore \chi^2 = \frac{200 \times (60 \times 80 - 20 \times 40)^2}{80 \times 120 \times 100 \times 100} \approx 33.33 > 10.28 = \chi_{0.001}^2, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$\therefore$ 依据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的 χ^2 独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即能认为喜爱足球运动与性别有关, 此推断犯错误的概率不超过 0.001 5 分

(2) 由题意得 X 的可能取值为 0, 1, 2, 6 分

$X = 0$, 即 $A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$,

$$\therefore P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$X = 1$, 即 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A, A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B$,

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A, A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C$,

$$\therefore P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{18}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$X = 2, A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B$,

$$\therefore P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

∴ X 的分布列:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{2}{9}$

..... 10 分

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{11}{18} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{19}{9} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) 由 $\bar{t} \approx 2.46, \bar{y} \approx 38.86, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) \approx 80.97, \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 \approx 3.78,$

$$\text{有 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{80.97}{3.78} \approx 21.42 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 38.86 - 21.42 \times 2.46 \approx -13.8 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

所以模型②中 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 21.4\sqrt{x} - 13.8 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由表格中的数据, 有 $182.42 > 74.12$, 即 $\frac{182.42}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} > \frac{74.12}{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

模型①的决定系数 R^2 小于模型②, 说明回归模型②刻画的拟合效果更好.....9 分 (只是判断模型②刻画的拟合效果更好, 没有根据数据说明, 得 2 分)

若要使年收益增量超过 80 万元, 则令 $21.4\sqrt{x} - 13.8 > 80, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\text{得 } \sqrt{x} > \frac{93.8}{21.4} \approx 4.4 \text{ 即 } x \geq 4.4^2 = 19.36, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

∴ 人工投入增量至少需要 20 人.12 分

21. 解: (1) 若 $a = 1, f(x) = e^{2x} - e^x - x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty), \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = (2e^x + 1)(e^x - 1), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

令 $f'(x) > 0$, 则 $x > 0$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $x < 0$, 3 分

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 4 分

$$(2) f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (2e^x + 1)(ae^x - 1), \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

若 $a \geq 1$,

$$\text{令 } f'(x) = (2e^x + 1)(ae^x - 1) = 0, \text{ 解得 } x = -\ln a, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$,

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 7 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 8 分

$$\text{当 } x = -\ln a \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小值, } f(x) \text{ 的最小值为 } f(-\ln a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

若 $f(x)$ 有零点, 则有 $f(x)_{\min} \leq 0$,

当 $a = 1$ 时,

$f(-\ln a) = 0$, 故 $f(x)$ 只有一个零点, 10 分

当 $a \in (1, +\infty)$ 时,



$1 - \frac{1}{a} > 0, \ln a > 0$, 故 $f(x)$ 没有零点, 11 分

综上所述, 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 有一个零点; 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 没有零点, 12 分

22. 解: (1) $\because$ 双曲线 $y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$ 的焦距为 $2c=2$,

$\therefore c=1$, 1 分

$\because e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore a = \sqrt{2}$, 2 分

$\because a^2 = b^2 + c^2$, $\therefore a^2 = 2$, $b^2 = 1$, 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 解法 (一) 设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

当直线 l 的斜率不存在时, 则直线 l 的方程为 $x=-1$, 5 分

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ 解得 $D(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}), E(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, 6 分

$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}} = \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times (-1) = 3-2\sqrt{2}$; 7 分

当直线 l 的斜率存在时, 则直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases}$ 消去 x 得, $(2k^2+1)y^2 - 2ky - k^2 = 0$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{2k}{2k^2+1}$, $y_1 y_2 = -\frac{k^2}{2k^2+1}$, 8 分

设 $\frac{y_2}{y_1} = t (t \neq -1)$, 则 $\frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4}{2k^2+1}$, 9 分

$\because k^2 \in (0, +\infty)$, $\therefore \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4}{2k^2+1} \in (-4, 0)$, 10 分

由 $-4 < \frac{(t+1)^2}{t} < 0$, 解得 $-3-2\sqrt{2} < t < -1$ 或 $-1 < t < -3+2\sqrt{2}$, 11 分

$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}} = \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times t \in (17-12\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2}) \cup (3-2\sqrt{2}, 1)$,

综上所述, $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比的取值范围为 $(17-12\sqrt{2}, 1)$ 12 分

(2) 解法 (二) 设 $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$,

设直线 l 的方程为 $x = my - 1$, 5 分

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = my - 1 \end{cases}$ 消去 x 得, $(m^2 + 2)y^2 - 2my - 1 = 0$,

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}$, 8 分

设 $\frac{y_2}{y_1} = t$, 则 $\frac{(y_1 + y_2)^2}{y_1 y_2} = \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4m^2}{m^2 + 2}$, 9 分

$\because m^2 \in [0, +\infty)$, $\therefore \frac{(t+1)^2}{t} = -\frac{4m^2}{m^2 + 2} \in (-4, 0]$, 10 分

由 $-4 < \frac{(t+1)^2}{t} \leq 0$, 解得 $-3 - 2\sqrt{2} < t < -3 + 2\sqrt{2}$, 11 分

$\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}} = -\frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times t \in (17-12\sqrt{2}, 1)$,

综上所述, $\triangle AEF$ 与 $\triangle BDF$ 的面积之比的取值范围为 $(17-12\sqrt{2}, 1)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线