遂宁市高中2024届第四学期期末教学水平监测

数学（理科）试题参考答案及评分意见

一、选择题（5×12=60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	B	C	C	D	B	C	A	D	B

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $\underline{40}$　　14. $\underline{-5<k<1 \text{且} k\neq -2}$　　15. $\underline{\dfrac{\pi}{3}}$　　16. $\underline{3}$

三、解答题

17. 【详解】(1) 设椭圆的长轴长为$2a(a>0)$，焦距为$2c(c>0)$

由条件可得$2a=10,2c=4$. 所以

$a=5,c=2$……………………………………………………………2分

所以

$b^2=a^2-c^2=25-4=21$……………………………………………………………3分

当椭圆的焦点在x轴上时，标准方程为

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$；……………………………………………4分

当椭圆的焦点在y轴上时，标准方程为

$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{21}=1$.……………………………………………5分

(2) 当抛物线的焦点在x轴上时，可设所求抛物线的标准方程为$y^2=-2px(p>0)$

将点P的坐标代入抛物线的标准方程得

$16=4p\Rightarrow p=4$……………………………………………6分

此时，所求抛物线的标准方程为

$y^2=-8x$；……………………………………………………………7分

当抛物线的焦点在y轴上时，可设所求抛物线的标准方程为$x^2=-2my(m>0)$，

将点P的坐标代入抛物线的标准方程得$4=8m$，解得

$m=\frac{1}{2}$，. . . . . 8 分

此时，所求抛物线的标准方程为

$x^2=-y$ . . . . 9 分

综上所述，所求抛物线的标准方程为 $y^2=-8x$ 或

$x^2=-y$ . . . . 10 分

18. 【详解】(1) 因为函数 $f(x)=ax^3+bx^2(x\in\mathbf{R})$ 的图象过点 $P(-1,2)$，所以 $-a+b=2$ . . 1 分

又因为 $f'(x)=3ax^2+2bx$，且 $f(x)$ 点 P 处的切线恰好与直线 $x-3y=0$ 垂直，

所以

$f'(-1)=3a-2b=-3$，. . . . . 3 分

由 $\begin{cases}-a+b=2\\3a-2b=-3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$，所以

$f(x)=x^3+3x^2(x\in\mathbf{R})$. . . . . 5 分

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$，

令 $f'(x)>0$，即 $3x(x+2)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>0$，

令 $f'(x)<0$，即 $3x(x+2)<0$，解得

$-2<x<0$，. . . . . 7 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 单调递增，$(-2,0)$ 单调递减，$(0,+\infty)$ 单调递增，. . . . . 9 分

根据函数 $f(x)$ 在区间 $[m,m+1]$ 上单调递增，

则有 $m+1\le-2$ 或

$m\ge0$ . . . . 11 分

解得 $m\le-3$ 或

$m\ge0$ . . . .

…………………………12 分

19. 【详解】【详解】(1) 由题知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,\bar{y}=\frac{196+230+302+390+482}{5}=320$

$\therefore\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-2)\times(-124)+(-1)\times(-90)+0+70+2\times162=732,\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$

$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{732}{\sqrt{10}\sqrt{54944}}=\frac{732}{741.2}\approx0.988$…………………

……….5 分

因为 $r>0.75$，所以认为相关变量 x,y 有较强的相关性.…………………………………………6 分.

(2) 由 (1) 得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{732}{10}=73.2,\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=320-73.2\times3=100.4$….10 分.

$\therefore$ 回归方程为 $\hat{y}=73.2x+100.4$,

当 $x=6$ 时 $\hat{y}=539.6$，即 2023 年该公司投入研发人数约 540 人.…………………………12 分.

20. 【详解】(1) 列联表如下：

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12	4	16
女生	9	5	14
合计	21	9	30

………………………………3 分..

$K^2=\frac{30\times(12\times5-4\times9)^2}{16\times14\times21\times9}\approx0.4082<2.072$，……………………………………

……………………5 分

所以没有 85%的把握认为学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别有关；……..6 分

(2) 由题意可知 X 的取值可能为 0，1，2，3，

则$P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$，　　$P(X=1)=\frac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\frac{10}{21}$，　　$P(X=2)=\frac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\frac{5}{14}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{21}$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$……………………………………………………………………12 分

21. 【详解】(1) 双曲线的焦点坐标为$(-1,0),(1,0)$，所以椭圆的焦点坐标为$(-1,0),(1,0)$ 1 分.

又椭圆中，ΔPF_1F_2面积最大值$S=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=\sqrt{3}$，故

$b=\sqrt{3}$……………………………3 分

所以椭圆C的方程为：

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；………………………………………………………………4 分

（2）设$R(x,y)$，由于直线过原点，则$S(-x,-y)$，

$E(x,0)$……………………………………………5 分

所以直线SE的斜率

$k_{SE}=\frac{y}{2x}=\frac{1}{2}k_{RS}=\frac{1}{2}k$……………………………………………………………7 分

（3）由题设，可设直线 l 为$y=k(x-3)$且$k\neq0$，联立椭圆方程，

整理得：$(3+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-12=0$，则$\Delta=576k^4-48(3+4k^2)(3k^2-1)>0$，

所以$\Delta=144-240k^2>0$，即$-\frac{\sqrt{15}}{5}<k<\frac{\sqrt{15}}{5}$且$k\neq 0$，

所以$x_M+x_N=\frac{24k^2}{3+4k^2}$，

$x_Mx_N=\frac{12(3k^2-1)}{3+4k^2}$，……………………………………………………8 分

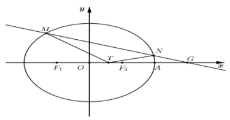
若存在$T(t,0)$使$\angle MTO=\angle NTA$恒成立，则

$|\frac{y_M}{x_M-t}|=|\frac{y_N}{x_N-t}|$，……………………9 分

由椭圆对称性，不妨令M,N在x轴上方且$x_N>x_M$，显然$x_M<t<x_N$，

所以$\frac{y_M}{t-x_M}=\frac{y_N}{x_N-t}$，即

$\frac{y_M}{t-x_M}+\frac{y_N}{t-x_N}=\frac{t(y_M+y_N)-x_Ny_M-x_My_N}{(t-x_M)(t-x_N)}=0$，……………10 分



所以$t(y_M+y_N)=x_Ny_M+x_My_N$，

即$t=\frac{x_N(x_M-3)+x_M(x_N-3)}{x_M+x_N-6}=\frac{2x_Mx_N-3(x_M+x_N)}{x_M+x_N-6}$ 11 分

综上，$t=\frac{\frac{24(3k^2-1)}{3+4k^2}-\frac{72k^2}{3+4k^2}}{\frac{24k^2}{3+4k^2}-6}=\frac{72k^2-24-72k^2}{24k^2-18-24k^2}=\frac{4}{3}$，

所以，存在$T(\frac{4}{3},0)$使$\angle MTO=\angle NTA$恒成立……………………………………………………12 分

22. 【详解】(1) 求导

$f'(x)=e^x-a$………………………………………………………………………1 分

①当$a\leq 0$时，$f(x)$在R上递增………………………………………………………………………3 分

②当$a>0$时，$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上递减，在$(\ln a,+\infty)$上递增…………………5 分

（2）①等价于 $h(x)=xe^{x}-a(\ln x+x)=xe^{x}-a\ln\left(xe^{x}\right)(x>0)$ 有两个零点，

令 $t=xe^{x}$，则 $t'=(x+1)e^{x}>0$，在 $x>0$ 时恒成立，所以 $t=xe^{x}$ 在 $x>0$ 时单调递增，

所以 $h(x)=xe^{x}-a\ln\left(xe^{x}\right)$ 有两个零点，等价于 $g(t)=t-a\ln t$ 有两个零点.........6 分

因为 $g'(t)=1-\frac{a}{t}=\frac{t-a}{t}$，所以

当 $a\le 0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，不可能有两个零点；

当 $a>0$ 时，令 $g'(t)>0$，得 $t>a$，$g(t)$ 单调递增，令 $g'(t)<0$，得 $0<t<a$，$g(t)$ 单调递减，

所以 $g(t)_{\min}=g(a)=a-a\ln a$，

若 $g(a)>0$，得 $0<a<e$，此时 $g(t)>0$ 恒成立，没有零点；

若 $g(a)=0$，得 $a=e$，此时 $g(t)$ 有一个零点；

若 $g(a)<0$，得 $a>e$，因为 $g(1)=1>0$，$g(e)=e-a<0$，$g(e^{a})=e^{a}-a^{2}>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,e)$，$\left(e,e^{a}\right)$ 上各存在一个零点，符合题意，

综上，a 的取值范围为 $(e,+\infty)$...8 分（方法不唯一）

②要证 $\ln x_1+\ln x_2>2-(x_1+x_2)$ 即证：$x_1+\ln x_1+x_2+\ln x_2>2$，

即证 $\ln\left(x_1e^{x_1}\right)+\ln(x_2e^{x_2})>2$，

由（2）中①知 $t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，所以只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$....................9 分

因为 $a\ln t_1=t_1$，$a\ln t_2=t_2$，所以 $a\left(\ln t_2-\ln t_1\right)=t_2-t_1$，$a\left(\ln t_2+\ln t_1\right)=t_2+t_1$，

所以 $\ln t_2+\ln t_1=\frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}(\ln t_2-\ln t_1)=\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_2}-1}$，只需证 $\frac{\left(\frac{t_2}{t_1}+1\right)\ln\frac{t_2}{t_1}}{\frac{t_2}{t_2}-1}>2$..10 分

设$0<t_1<t_2$，令$m=\frac{t_2}{t_1}$， 则$m>1$，所以只需证 $\ln m>2\frac{m-1}{m+1}$ 即证 $\ln m+\frac{4}{m+1}-2>0$，

令$h(m)=\ln m+\frac{4}{m+1}-2$， $m>1$， 则 $h'(m)=\frac{1}{m}-\frac{4}{(m+1)^2}=\frac{(m-1)^2}{m(m+1)^2}>0$，

$h(m)>h(1)=0$，

即当$m>1$时， $\ln m+\frac{4}{1+1}-2>0$ 成

立……………………………………………………………11 分

所以$\ln t_1+\ln t_2>2$，即$\ln x_1+\ln x_2>2-(x_1+x_2)$………………12 分（方法不一）