2022～2023 学年高三押题信息卷

文科数学(二)参考答案

1. A　因为$(1+2i)x=1+yi$，即$x+2xi=1+yi$，所以$x=1$，$y=2$，$|x+yi|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. 故选 A.

2. D　由$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\y=x^2-1\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=0,\end{cases}$所以$A\cap B$有 3 个元素，它的子集有 8 个. 故选 D.

3. C　由扇形统计图知，购买的 600 棵树苗中，梧桐的数量为$600\times40\%=240$(棵)，依题意，青年教师、中年教师、老年教师报名参加植树活动的人数之比为$5:3:2$，所以中年教师应分得梧桐的数量为$\frac{3}{5+3+2}\times240=72$(棵). 故选 C.

4. A　$y=x^3+x$的导数为$y'=3x^2+1$，所以曲线$y=x^3+x$在点(x_0,y_0)处的切线的斜率$k=3x_0^2+1$，由切线平行于直线$4x-y-2=0$，得$3x_0^2+1=4$，解得$x_0=1$或$x_0=-1$. 若$x_0=1$，则切点为$(1,2)$，此时切线方程为$4x-y-2=0$，与直线l重合，不符合题意. 若$x_0=-1$，则切点为$(-1,-2)$，此时切线方程为$4x-y+2=0$，与直线l平行，符合题意. 故选 A.

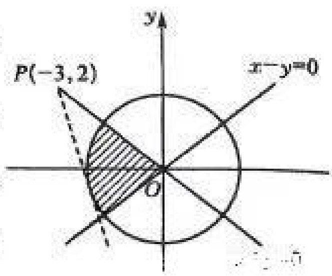
5. B　圆台的表面积为$\pi(1+2)\times2+\pi\times1^2+\pi\times2^2=11\pi$，设球的半径为$r$，则$4\pi r^2=11\pi$，$r=\frac{\sqrt{11}}{2}$，所以该球的体积为$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^3=\frac{11\sqrt{11}\pi}{6}$. 故选 B.

6. D　因为数列$\{a_n\}$为等比数列且公比不为±1，则S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$成等比数列，设$S_4=m(m\neq0)$，则$S_8=4m$，则$S_8-S_4=3m$，$S_{12}-S_8=9m$，$S_{16}-S_{12}=27m$，故$S_{16}=S_4+(S_8-S_4)+(S_{12}-S_8)+(S_{16}-S_{12})=40m$，所以$\frac{S_{16}}{S_8}=\frac{40m}{4m}=10:1$. 故选 D.

7. B　对于 A，作出$f(x)=-|x^2-2x-3|$的图象，显然$f(x)$在$(0,-\infty)$上不单调，故 A 错误；对于 B，因为$y=2^{1-x}$和$y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$在$(0,+\infty)$上均为减函数，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 B 正确；对于 C，因为$f'(x)=-(1+\ln x)$，所以该函数在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递减，故 C 错误；对于 D，因为$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\cos x$，显然函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上不是单调函数，故 D 错误. 故选 B.

8. D　将函数$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象上所有点的横坐标变为原来的一半，纵坐标变为原来的 2 倍，然后向上平移 1 个单位长度得到函数$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$的图象，故 A 项错误；当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，故$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上先增后减，故 B 项错误；当$x=\frac{\pi}{8}$时，$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，故$g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{8},1\right)$中心对称，故 C 项错误；当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，当$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，即$x=\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{2}$时，$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$取得最小值，且最小值为$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\sqrt{2}+1$；当$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{3\pi}{8}$时，$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$取得最大值，且最大值为$2\times1+1=3$，故值域为$[\sqrt{2}+1,3]$，故 D 项正确. 故选 D.

9. B　作出不等式组表示的平面区域，如图所示，由题意，知$\frac{1}{4}\pi r^2=\pi$，解得$r=2$. 因为目标函数$z=\frac{x+y+1}{x+3}=1+\frac{y-2}{x+3}$表示区域内的点与点$P(-3,2)$连线的斜率加上 1，由图知当区域内的点与点$P$的连线与圆相切时斜率最小. 设切线方程为$y-2=k(x+3)$，即$kx-y+3k+2=0$，则有$\frac{|3k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=-\frac{12}{5}$或$k=0$(舍)，所以$z_{min}=1-\frac{12}{5}=$



$-\frac{7}{5}$. 故选 B.

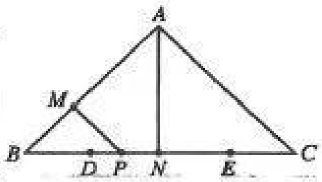
10. C　对于 A，平面 A_1BE 分得该直三棱柱所得两个几何体都是四棱锥，其底面都是面积相等的直角梯形，而其高都是 1，故其体积相等，故 A 正确；对于 B，延长 AC 和 A_1E 交于点 O，因为点 E 为 CC_1 的中点，所以 $OB_1 // DE$，故 $DE//$ 平面 AB_1C，故 B 正确；对于 C 和 D，因为 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}CE\cdot BC=\frac{1}{4}$，且 A_1 到平面 BCE 的距离为 $A_1C_1=1$，又 $EA_1=BE=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$BA_1=\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle A_1BE}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，设 C 到平面 A_1BE 的距离为 d，由 $V_{C\text{-}A_1BE}=V_{A_1\text{-}BCE}$ 得 $\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle A_1BE}=\frac{1}{3}A_1C_1\cdot S_{\triangle BCE}$，解得 $d=\frac{\sqrt{6}}{6}$，故直线 BC 与平面 A_1BE 所成角的正弦值为 $\frac{d}{BC}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，其余弦值为 $\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，故 C 错误，故 D 正确. 故选 C.

11. C　根据题意知 $\frac{1+0}{-\frac{p}{2}}=-1$，所以 $p=2$，所以抛物线 $C:y^2=4x$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $x=ty+m$ $(m\neq0)$，与抛物线方程联立得 $y^2-4ty-4m=0$，所以 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$，即 $x_1+x_2=4t^2+2m$，$x_1x_2=m^2$. 又因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以 $y_1y_2+x_1x_2=0$，解得 $m=0$（舍去），$m=4$，所以 $y_1+y_2=4t$，$x_1+x_2=4t^2+8$，因为 $|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(1+t^2)(16t^2+64)}=4\sqrt{(1+t^2)(t^2+4)}$，原点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{4}{\sqrt{1+t^2}}$，所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=8\sqrt{t^2+4}$，所以当 $t=0$ 时，$S_{\triangle OMN}=16$ 为最小值. 故选 C.

12. D　$a=\cos\frac{\pi}{7}=-\cos\frac{8\pi}{7}=-2\cos^2\frac{4\pi}{7}+1=-2c^2+1$，所以 $a+2c^2=1$；$b=\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{7}-1=2a^2-1$，$c=\cos\frac{4\pi}{7}=2\cos^2\frac{2\pi}{7}-1=2b^2-1$，所以 $a-b-c=-2(a^2+b^2+c^2)+3=\frac{1}{2}$，所以 $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{4}$；$abc=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{8\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$；$a+1=-2c^2+2$，$b+1=2a^2$，$c+1=2b^2$，所以 $(a+1)(b+1)(c+1)=-8a^2b^2c^2+\frac{8a^2b^2c^2}{c^2}=8a^2b^2c^2\left(\frac{1}{c^2}-1\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{c^2}-1\right)\neq\frac{1}{8}$，所以①②③正确. 故选 D. 来源：高三答案公众号

13. 2　令 $g(x)=2^x-2^{-x}$，$h(x)=1+\frac{a}{2^x-1}$，则 $g(-x)=2^{-x}-2^x=-g(x)$，所以函数 $g(x)$ 为奇函数，则由 $f(x)=g(x)h(x)$ 是偶函数，知 $h(x)=1+\frac{a}{2^x-1}$ 为奇函数，所以 $h(-x)+h(x)=0$，即 $1+\frac{a}{2^{-x}-1}+1+\frac{a}{2^x-1}=0$，整理得 $2-a=0$，即 $a=2$. 来源：高三答案公众号

14. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　由平面向量的加法法则可得 $|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}|_{\min}(\lambda\in\mathbf{R})$ 就是点 A 到 BC 的距离 $AN=3$，依题意得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，底边 $BC=8$，D，E 为底边 BC 的两个四等分点，因为 $\overrightarrow{AP}=\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\cos^2\alpha\cdot\overrightarrow{AC}$，$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得点 P 在线段 DE 上运动，当点 P 在点 D 处时，$|\overrightarrow{MP}|$ 取得最小值，根据余弦定理解得 $MD=\frac{\sqrt{13}}{3}$.



15. 18　由题意易得双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，直线 OP 的斜率存在且不为 0，设直线 OP 的方程为 $y=kx(k\neq0)$，则直线 OQ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2=\frac{2}{2-k^2},\\ y^2=\frac{2k^2}{2-k^2},\end{cases}$ 所以 $|OP|^2=x^2+y^2=\frac{2(k^2+1)}{2-k^2}$，同理可得 $|OQ|^2=\frac{2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{2-\frac{1}{k^2}}=\frac{2(k^2+1)}{2k^2-1}$，所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{2-k^2+(2k^2-1)}{2(k^2+1)}=\frac{1+k^2}{2(k^2+1)}=\frac{1}{2}$，$|OP|^2+4|OQ|^2=2(|OP|^2+4|OQ|^2)\left(\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}\right)=2\left[5+4\left(\frac{|OQ|}{|OP|}\right)^2+\left(\frac{|OP|}{|OQ|}\right)^2\right]\geqslant2(5+4)=18$，当且仅当 $|OP|=\sqrt{2}|OQ|=\sqrt{6}$ 时取等号，所以 $|OP|^2+4|OQ|^2$ 的最小值为 18.

16. 88　由题意可得，$S_n>0$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}\left(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right)$，化简得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，又当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)$，即 $S_1=\frac{1}{2}\left(S_1+\frac{1}{S_1}\right)$，解得 $S_1=1$，$S_1^2=1$。∴数列 $\{S_n^2\}$ 是首项、公差均为 1 的等差数列，∴$S_n^2=1+(n-1)\times1=n$，即 $S_n=\sqrt{n}$. 当 $n\geqslant2$ 时，$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{2S_n}=\frac{1}{S_n}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$①，设 $S=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}$，由①可得，$S>1+2\times[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2\,023})]=1+2\times(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2})^2=2\,026-4\sqrt{1\,012}>2\,026-4\sqrt{1\,024}=2\,026-4\times32=1\,898$，而 $43.5^2=1\,892.25$，∴$(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2})^2>1\,898>1\,892.25=43.5^2$，∴$\sqrt{2\,024}-\sqrt{2}>43.5$，∴$1+2\times(\sqrt{2\,024}-\sqrt{2})>1+2\times43.5=88$，且 $S<1+2\times[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,022})]=1+2\times(\sqrt{2\,023}-1)=2\sqrt{2\,023}-1$，∵$45^2=2\,025$，∴$2\sqrt{2\,023}-1<2\sqrt{2\,025}-1=2\times45-1=89$，∴$\left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}\right]=88$.

17. 解：(1) $\triangle ABC$ 中，因为 $\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\sin^2A$，

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=-bc$，……………………………………………… 2 分

由余弦定理得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，……………………………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………………… 6 分

(2) 依题意有 $\frac{\sqrt{3}bc}{4}=\sqrt{3}$，即 $bc=4$，所以 $b+c\geqslant2\sqrt{bc}=4$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号. ………… 8 分

又由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=b^2+c^2+bc\geqslant3bc=12$，

所以 $a\geqslant2\sqrt{3}$，当且仅当 $b=c=2$ 时取等号. ……………………………… 11 分

所以 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 $4+2\sqrt{3}$. ……………………………………… 12 分

18. 解：(1) 由 2×2 列联表中数据计算可得，K^2 的观测值为

$K^2=\frac{500\times(100\times70-150\times180)^2}{250\times250\times280\times220}\approx51.948>6.635$，……………………………… 4 分

所以能有 99% 以上的把握认为数学成绩优秀与注意力集中水平高有关. ……………………… 6 分

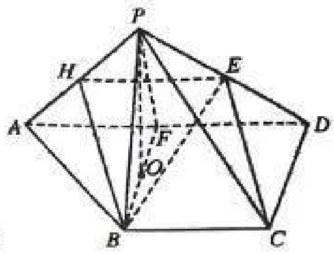
(2) 数学得分在 120 分以下且注意力集中水平在 500 分以上(含 500 分)和 500 分以下的人数分别为 100 人和 150 人，所以按注意力集中水平得分进行分层抽样抽取 5 名学生，可得注意力集中水平在 500 分以上(含 500 分)和 500 分以下的人数分别为 2 人和 3 人，分别记为“甲”“乙”和“A”“B”“C”. ……………………………… 8 分

从这 5 名学生中随机抽取 3 人，有(甲，乙，A)，(甲，乙，B)，(甲，乙，C)，(甲，A，B)，(甲，A，C)，(甲，B，C)，(乙，A，B)，(乙，A，C)，(乙，B，C)，(A，B，C)共 10 种可能，…… 10 分

其中 3 人中至少 2 人注意力集中水平得分在 500 分以下的有(甲，A，B)，(甲，A，C)，(甲，B，C)，(乙，A，B)，(乙，A，C)，(乙，B，C)，(A，B，C)共 7 种可能.

故 3 人中至少 2 人注意力集中水平得分在 500 分以下的概率 $P=\frac{7}{10}$. …… 12 分

19. (1)证明：如图所示，取 PA 的中点 H，连接 HE，HB，



$\because E$ 为 PD 中点，$\therefore HE$ 为$\triangle PAD$ 的中位线，

$\therefore HE /\!/ AD$，且 $HE=\frac{1}{2}AD$，又 $BC /\!/ AD$，且 $BC=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore HE /\!/ BC$，且 $HE=BC$.来源：高三答案公众号

$\therefore$四边形 $BCEH$ 为平行四边形，$\therefore CE /\!/ BH$，…… 3 分

$\because BH\subset$平面 ABP，$CE\not\subset$平面 ABP，

$\therefore CE /\!/$平面 ABP. …… 5 分

(2)解：由题意可知，$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，$ABCD$ 为直角梯形，如图所示，取 AD 中点 F，连接 BF，PF，

$\because AD=2BC=4$，$\therefore PF=BF=2$，

$\because PF\perp AD$，$BF\perp AD$，$PF\cap BF=F$，又 PF，$BF\subset$平面 PBF，$\therefore DF\perp$平面 PBF，

$\therefore BC\perp$平面 PBF，$\because PB\subset$平面 PBF，$\therefore BC\perp PB$. …… 7 分

$\therefore$在直角$\triangle PBC$ 中，$PC=2\sqrt{2}$，$BC=2$，$\therefore PB=2$，$\triangle PBF$ 为等边三角形，

取 BF 的中点 O，则 $PO\perp BF$，$PO\perp DF$，$DF\cap BF=F$，又 DF，$BF\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$，$PO=\sqrt{3}$. …… 10 分

$\because E$ 为 PD 的中点，$\therefore E$ 到平面 PBC 的距离等于 D 到平面 PBC 的距离的一半，

$\therefore V_{P\text{-}BCE}=V_{E\text{-}PBC}=\frac{1}{2}V_{D\text{-}PBC}=\frac{1}{2}V_{P\text{-}BCD}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot PO=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 12 分

解：(1)由题意知 $2a=4$，$a=2$，…… 1 分

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $c=\sqrt{3}$，由 $a^2=b^2+c^2$ 可得 $b^2=1$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …… 3 分

(2)由题意知 l_1，l_2 的斜率必存在且不为 0，设 l_1 的斜率为 k_1，l_2 的斜率为 k_2，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 l_1 的方程为 $y=k_1(x-1)$，联立$\begin{cases}y=k_1(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y 可得$(1+4k_1^2)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-4=0$，

$\Delta>0$ 恒成立，所以 $x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$，$x_1x_2=\frac{4k_1^2-4}{1+4k_1^2}$，

所以 $x_M=\frac{4k_1^2}{1+4k_1^2}$，$y_M=k_1(x_M-1)=\frac{-k_1}{1+4k_1^2}$. …… 6 分

同理可得 $x_N=\frac{4k_2^2}{1+4k_2^2}=\frac{4\times\frac{1}{9k_1^2}}{1+4\times\frac{1}{9k_1^2}}=\frac{4}{9k_1^2+4}$，$y_N=\frac{-k_2}{1+4k_2^2}=\frac{-\frac{1}{3k_1}}{1+4\times\frac{1}{9k_1^2}}=\frac{-3k_1}{9k_1^2+4}$，…… 8 分

$$k_{MN}=\frac{\frac{-3k_1}{9k_1^2+4}+\frac{k_1}{1+4k_1^2}}{\frac{4}{9k_1^2+4}-\frac{4k_1^2}{1+4k_1^2}}=\frac{-3k_1(1+4k_1^2)+k_1(9k_1^2+4)}{4(1+4k_1^2)-4k_1^2(9k_1^2+4)}=\frac{k_1}{4(1+3k_1^2)},$$ ………………………………………… 10分

所以直线 MN 的方程为 $y-\frac{-3k_1}{9k_1^2+4}=\frac{k_1}{4(1+3k_1^2)}\left(x-\frac{4}{9k_1^2+4}\right)$，即 $y=\frac{k_1}{4(1+3k_1^2)}(x-4)$，

所以直线 MN 过定点，且定点坐标为 $(4,0)$. ………………………………………… 12分

21. (1)解：$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{45}{22}x+1$，设 $f''(x)$ 为 $f'(x)$ 的导函数，来源：高三答案公众号

则 $f''(x)=3x+\frac{45}{22}$. ………………………………………… 1分

由题意，$f''(x)=3x+\frac{45}{22}\geqslant 0$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上恒成立，………………………………………… 2分

即 $x\geqslant -\frac{15}{22}$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 上恒成立，………………………………………… 3分

所以 $a\geqslant -\frac{15}{22}$，故实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{15}{22},+\infty\right)$. ………………………………………… 4分

(2)证明：设函数 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $h'(x)=e^x-x-1$，$h'(x)$ 的导函数 $h''(x)=e^x-1$. ………………… 5分

若 $x>0$，则 $h''(x)>0$，若 $x<0$，则 $h''(x)<0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………… 6分

所以 $h'(x)$ 的最小值为 $h'(0)=0$，则 $h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 为增函数. ………………………………………… 7分

又 $h(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)>0$，当 $x<0$ 时，$h(x)<0$.

即当 $x>0$ 时，$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$，当 $x<0$ 时，$e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1<0$. ………………………………………… 8分

(3)证明：设 $g(x)=xe^x+ax^2+a$，由(2)知 $xh(x)=xe^x-\frac{1}{2}x^3-x^2-x\geqslant 0$，

即 $xe^x\geqslant\frac{1}{2}x^3+x^2+x$，

所以 $g(x)=xe^x+ax^2+a\geqslant\frac{1}{2}x^3+(a+1)x^2+x+a$. ………………………………………… 10分

因为 $2.7<e<2.8$，所以 $a>\frac{1}{2\times 2.8^3}=\frac{1}{43.904}>\frac{1}{44}$，………………………………………… 11分

所以 $\frac{1}{2}x^3+(a+1)x^2+x+a>\frac{1}{2}x^3+\left(\frac{1}{44}+1\right)x^2+x+\frac{1}{44}$，

故 $f(x)<xe^x+ax^2+a$. ………………………………………… 12分

22. 解：(1)由 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，又 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，

所以 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$. ………………………………………… 2分

由 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，消去参数得 $x-y=4$，………………………………………… 3分

C_1 的圆心为 $(2,0)$，半径为 2，则圆心到直线 $x-y=4$ 的距离为 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$. ………………………………………… [illegible]分

(2)曲线 C_3 经过变换 $\begin{cases} x'=x-2, \\ y'=\frac{1}{2}y \end{cases}$ 后得到曲线 C_1，则 $(x'+2-2)^2+(2y')^2=4$，

即曲线 C_3 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 6 分

设点 $P(2\cos\varphi, \sin\varphi)$，则点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|2\cos\varphi-\sin\varphi-4|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\varphi-\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\varphi\right)-4\right|}{\sqrt{2}}=$

$\frac{|\sqrt{5}\sin(\alpha-\varphi)-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4-\sqrt{5}\sin(\alpha-\varphi)}{\sqrt{2}}$ (其中 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$)，………………………… 8 分

故当 $\sin(\alpha-\varphi)=1$ 时，d 取得最小值，且 $d_{\min}=\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，来源：高三答案公众号

因此，当点 P 到直线 AB 的距离最小时，$\triangle PAB$ 的面积也最小，

所以 $\triangle PAB$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d_{\min}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=4-\sqrt{5}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $x>2$ 时，$f(x)\leqslant 2x$ 等价于 $x+1+x-2\leqslant 2x$，该不等式恒成立，所以 $x>2$；………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，$f(x)\leqslant 2x$ 等价于 $-x-1-x+2\leqslant 2x$，解得 $x\geqslant\frac{1}{4}$，此时不等式无解；………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 2x$ 等价于 $x+1-x+2\leqslant 2x$，解得 $x\geqslant\frac{3}{2}$，所以 $\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$. ………………………… 3 分

综上所述，不等式的解集为 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)\geqslant k\left|x-\frac{1}{2}\right|$，得 $|x+1|+|x-2|\geqslant k\left|x-\frac{1}{2}\right|$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$3\geqslant 0$ 恒成立，所以 $k\in\mathbf{R}$；………………………………………………………… 5 分

当 $x\neq\frac{1}{2}$ 时，$k\leqslant\frac{|x+1|+|x-2|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\frac{\left|x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right|}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\left|1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|+\left|1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|$ 恒成立，…… 7 分

因为 $\left|1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|+\left|1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right|\geqslant\left|\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)+\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\right|=2$，

当且仅当 $\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)\geqslant 0$ 时取等号，所以 $k\leqslant 2$.

综上所述，k 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。